Apunts de Matemàtiques per a l'Accés a la UIB per a majors de 25 anys

Teoria i exercicis per a la preparació de les "Proves d'accés a la Universitat de les Illes Balears per a majors de 25 anys i menors de 40 anys" de l'assignatura de Matemàtiques

Xavier Bordoy Xisco Sebastià

Col·laboradors del projecte *Apunts per a l'accés a la UIB per a majors de 25 anys*

Podeu llegir la versió digital escanejant aquest codi QR

Drets d'autor

Copyrights externs

[1] http://git.somenxavier.xyz/somenxavier/apunts-acces-uib-per-a-majors-de-25-anys

[2] https://ca.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Parallellopipedum.png

[3] http://tube.geogebra.org/material/show/id/21240

[4] http://www.texample.net/tikz/examples/set-operations-illustrated-with-venn-diagrams/

- Les figures 6.2 i 6.5 són obres derivades de *A Venn diagram with PDF blending*[5] de n'Stefan Kottwitz. 2015. L'obra original es distribueix sota llicència Reconeixement 2.5 de Creative Commons (CC-BY 2.5).

- La figure 6.3 és una obra derivada de *Probability tree*[6] d'en Kjell Magne Fauske. 2006. L'obra original es distribueix sota llicència Reconeixement 2.5 de Creative Commons (CC-BY 2.5).

- Els exercicis 258, 259 i 260 estan extrets del "Proyecto MaTEX-1-ESO" (exercicis 20 al 29) de Francisco Javier González Ortiz. 2004. L'obra original té tots els drets reservats.

L'ús d'aquests materials es realitza acollint-se als termes de les corresponents llicències i al dret de cita i ressenya per a fins docents amparat per l'article 32 de la Llei de Propietat Intel · lectual de la legislació espanyola — Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 d'abril de 1996. Entrada 8930 del BOE 97, de 22 d'abril de 1996.

Informació del document

La versió d'aquest document és la 2.3.1-pre. Aquest document ha estat generat, el 15 de setembre de 2019 a les 23:17, usant LaTeX, LuaTeX, Geogebra i Ti*k*Z sota un entorn GNU/Linux. La revisió d'aquest document és la 203.0a. El conjunt de les versions s'administra amb el git. La referència d'aquesta versió és la:

45622bf6d81d47e4d302ae5d7db0535859428c4b

El document ha estat mecanografiat. Encara que s'hagi revisat diverses vegades és possible que hi hagi errors. Si en detecteu algun, si us plau, aviseu-nos pel canal que considereu més oportú:

- git.somenxavier.xyz/somenxavier/apunts-acces-uib-per-a-majors-de-25-anys/issues

- somenxavier@gmail.com

D'altra banda, si adapteu o modifiqueu aquesta obra i considereu que el canvi ha estat per a millorar-la, us agraïríem que ens ho communiquéssiu. Si el canvi fos del nostre gust, l'incorporaríem a l'obra original en els mateixos termes de la llicència.

[5] http://www.texample.net/tikz/examples/venn/
[6] http://www.texample.net/tikz/examples/probability-tree/

Índex

Índex de figures

Índex de taules

Índex de resultats

Prefaci

En aquest text es desenvolupen únicament tres de les quatre parts de les quals consta el temari de la prova de Matemàtiques d'Accés a la Universitat de les Illes Balears per a majors de 25 anys. El motiu principal d'aquest fet és que, encara que el manual les tengués, no es tendria temps material de veure-les a classe amb els set mesos d'un curs de preparació a la UIB de qualsevol Centre d'Educació de Persones Adultes. Aquestes tres parts no es tracten aquí d'una manera exhaustiva en relació a l'esmentat temari; el que es vol presentar és, només, un manual principalment pràctic d'una part del temari d'aquestes proves.

S'han deixat de banda els aspectes més formals propis d'un curs amb els continguts que es tractaran aquí, i, per aquest motiu, algunes de les definicions es presenten d'una manera intuïtiva i més propera als alumnes.

D'altra banda, només es necessari un coneixement elemental de Matemàtiques per poder seguir aquestes notes: operacions amb els diferents tipus de nombres, resolució d'equacions de primer i segon grau, etc. (vegeu l'Apèndix A).

El nivell dels continguts es correspondria, essencialment, amb un segon de batxillerat excepte la part de Geometria al pla i Probabilitat que equivaldria a un nivell de l'Educació Secundària Obligatòria (ESO).

Palma, 15 de setembre de 2019.

Part I

Àlgebra lineal

1

Determinants

Un *determinant* el nombre, que es calcula segons determinades regles, associat a una disposició de nombres escrits en forma d'n fileres i n columnes. El tamany del determinant, és a dir, el nombre de fileres (o de columnes) s'anomena *ordre*. Alguns exemples d'aquesta disposició són les expressions següents:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

En aquest cas, el primer determinant té ordre 2 i el segon determinant té ordre 3.

En general, un determinant d'ordre n tendrà una expressió de l'estil

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

on cada a_{ij} és un nombre, amb $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, n$.

A continuació veurem com es calculen aquests valors numèrics associats a cadascuna d'aquestes expressions. Com pareix natural, aquests valors dependran de l'ordre del determinant.

1.1 Càlcul de determinants

Ordre 1 El determinant d'ordre 1 és el propi element que el constitueix:

$$|a| = a$$

Ordre 2 Es calculen mitjançant la regla següent:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemple 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3{\cdot}(-1) - (-5){\cdot}2 = -3 + 10 = 7$$

Observem que el que va precedit del signe positiu és aquell que s'aconsegueix multiplicant els nombres en *sentit dret*. En canvi, el terme precedit pel signe negatiu s'obté multiplicant els dos nombres en *sentit esquerre*.

Ordre 3 Es calculen mitjançant la regla de Sarrus

Algorisme 1 (regla de Sarrus).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

De la mateixa manera que per als determinants d'ordre 2, els termes del determinant que es calculen multiplicant els nombre en *sentit dret* van precedits de signe positiu i tenen signe negatiu els que provénen de multiplicacions de nombres *en sentit esquerre*. Gràficament (Figura 1.1):

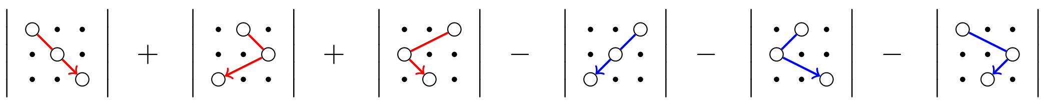


Figura 1.1: Regla pnemotècnica per a recordar la regla de Sarrus

Exemple 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 \cdot 4$$
$$- (-3) \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \cdot 4$$
$$= -4 + 0 - 36 - 6 + 30 - 0$$
$$= -16$$

Ordre ≥ 4 Per a calcular els determinants d'ordre superior a 3 ens fan falta alguns conceptes que veure més endavant (vegeu Secció 1.2).

Exercici 1. Calculeu els determinants següents:

a)

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

d)

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

e)

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

f)

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

g)

$$\begin{vmatrix} 3-x & 4x^2 \\ 6 & 7+2x \end{vmatrix}$$

h)

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

Solució. *a*) 5, *b*) -7, *c*) 15, *d*) 30, *e*) -40, *f*) 68, *g*) $-26x^2-x+21$, *h*) x^3+3x^2.
■

1.2 Adjunt d'un element d'un determinant

Definició 1 (menor complementari). Donat un determinant, el *menor complementari* d'un element qualsevol és el determinant que resulta de suprimir la filera i la columna a les quals pertany aquest element.

Exemple 3. Donat el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

El menor complementari de l'element que ocupa la filera 3 i la columna 2 (és a dir, el nombre 2) és:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

donat que hem llevat la tercera filera i la segona columna.

Definició 2 (adjunt). S'anomena *adjunt* d'un element al menor complementari precedit del signe $+$ o $-$ segons l'esquema següent:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

De forma compacte, el signe de l'element a_{ij} és $(-1)^{i+j}$, on i, j indiquen, respectivament, la filera i la columna d'aquest element dins el determinant. Això vol dir que si la suma $i + j$ és parell, aleshores el signe de l'adjunt serà positiu, i si $i + j$ és senar, aleshores l'adjunt tendrà signe negatiu.

Exemple 4. A l'exemple anterior, l'adjunt del 2 és

$$-\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

el valor del qual és -27.

Exercici 2. Calculeu l'adjunt de l'element central i de l'element a_{13} del determinant

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

1.3 Càlcul de determinants d'ordre superior a 3

Per al càlcul de determinants d'ordre 4 o majors s'utilitza el *desenvolupament* per una filera o una columna, que consisteix en calcular un determinant d'ordre n a partir de n determinants d'ordre $n-1$. Les passes a seguir són les següents:

Algorisme 2 (desenvolupament d'un determinant)**.**

1. *Es tria una filera o columna qualsevol (la tria és arbitrària)*

2. *El resultat del determinant és la suma dels adjunts dels elements d'aquesta filera pels seus adjunts*

És a dir, si tenim un determinant d'ordre n:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

aleshores el seu desenvolupament per la primer filera seria

$$a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13} + a_{14} \cdot \Delta_{14} + \ldots + a_{1n} \cdot \Delta_{1n},$$

on Δ_{ij} denota l'adjunt de l'element a_{ij}.

Exemple 5. Calcularem el valor del determinant següent desenvolupant-lo per la quarta columna:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= -3 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot \left(\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) + 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &= -3 \cdot (-70) + 1 \cdot 28 + 0 + 3 \cdot (-77) \\ &= 7 \end{aligned}$$

Observem que, amb aquest mètode, és convenient triar aquella línea que contengui més zeros, ja que per a aquests no és necessari ni tan sols calcular el seu adjunt.

Exercici 3. Calculeu el valor dels determinants següents:

a)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -6 \\ 4 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Solució. *a)* 2326, *b)* 0 ■

1.4 Propietats dels determinants

Definició 3 (línia d'un determinant). S'anomena *línia* d'un determinant a qualsevol filera o columna del determinant.

Vegem a continuació les propietats dels determinants.

1. Si un determinant té tots els elements d'una línia qualsevol iguals a zero, el determinant val 0.

   Per exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. Si es permuten dues línees paral · leles d'un determinant, aquest canvia de signe.

   Per exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 \qquad \text{i} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

3. Un determinant que té dues línees paral · leles iguals val 0.

   Per exemple:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

   Això és especialment útil quan el determinant involucra lletres. Per exemple:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a & 2 & a \\ a & 3 & a \end{vmatrix} = 0,$$

   fet que ens estalvia una considerable feina, que de ben segur faríem si calculèssim el valor d'aquest determinant emprant la regla de Sarrus.

4. Si es multipliquen tots els elements d'una línia d'un determinant per un mateix nombre, el valor del determinant queda multiplicat per aquest nombre.

   Per exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 \qquad \text{i} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -32.$$

   En aquest darrer determinant hem multiplicat tots els elements de la segona filera per 2.

   Aquesta propietat es fa servir per treure factor comú d'un determinant; aquesta operació s'ha de fer línia a línia quan s'aplica més d'una vegada a un mateix determinant:

   Observació 1 (extracció de factor comú a un determinant). Si una línia d'un determinant està multiplicada per un mateix nombre, es pot treure factor comú aquest nombre a fora del determinant. Per exemple:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 10 & -6 \\ 6 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & -4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 & -6 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 & -6 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 8 \cdot 56 \\
&= 448
\end{aligned}$$

Després de seguir aquesta regla, el determinant resultant té nombres més petits i, per tant, resulta més fàcil de calcular.

Exemple 6. Volem calcular el determinant $\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ a & 3 & b \\ a & 2 & b \end{vmatrix}$.

Podríem aplicar la regla de Sarrus, però el fet de què el determinant tingui lletres faria que fos molt farragós. Per això intentarem extreure factor comú:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ a & 3 & b \\ a & 2 & b \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ja que té dues columnes iguals.

Exercici 4. Treieu tot el factor comú que es pugui del determinant

$$\begin{vmatrix} 6 & -18 \\ -4 & 15 \end{vmatrix}$$

Exercici 5. Només treient factor comú, calculeu el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} x & 2x & 4x \\ x^2 & 2x^2 & 4x^2 \\ x^3 & 2x^3 & 4x^3 \end{vmatrix}.$$

5. Si els elements de dues línees paral · leles d'un determinant són proporcionals, el determinant val 0.

   Per exemple:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 15 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

   ja que la tercera columna és igual a la primera multiplicada per 5.

6. Si tots els elements d'una línia d'un determinant estan formats per la suma de dos sumands, aquest determinant es pot descomposar en la suma de dos determinants. En concret, si la línia i està formada per la suma de dos sumants, el determinant original es divideix en dos determinants:

   (a) un que té el primers sumands en la línia i i a la resta de línies és idèntic al determinant original

   (b) l'altre que té els segons sumands en la línia i i a la resta de línies és idèntic al determinant original

   Per exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-1 & 5 & -3 \\ 1+2 & 2 & 0 \\ -1+0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

   Per exemple:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x+a & 2 & 1 \\ x+a & 0 & 1 \\ x+b & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (2b-2a) \\ &= 2b-2a \end{aligned}$$

7. Si els elements d'una línia són combinació lineal de les altres línees paral · leles, aleshores el determinant és igual a 0.

   Definició 4 (combinació lineal). Una línia L és *combinació lineal* de n línies L_1, L_2, ..., L_n si, i només si, podem obtenir la línia L com a suma de les línies L_1, ..., L_n prèviament multiplicades per nombres reals, és a dir,

$$L = a_1 \cdot L_1 + a_2 \cdot L_2 + \ldots + a_n \cdot L_n.$$

   Per exemple:

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ja que la primera columna resulta de sumar la segona columna multiplicada per 1 i la tercera per 2 (i la quarta multiplicada per 0) i

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ja que la primera columna és la suma de les dues primeres columnes.

8. Recíprocament, si un determinant val 0, aleshores té una línia que és combinació lineal de les altres línies

9. Si a una línia d'un determinant se li suma una combinació lineal d'altres línies paral · leles, aleshores el valor del determinant no varia.

   Per exemple, els determinants

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

   tenen el mateix valor, ja que el segon determinant resulta de sumar, en el primer determinant, a la segona columna la primera multiplicada per -2.

1.5 Tipus de determinants

Existeixen tipus particulars de determinants que fan que el seu càlcul sigui més senzill:

Definició 5 (diagonal principal). S'anomena *diagonal principal* d'un determinant al conjunt d'elements que van del vèrtex superior esquerre a l'inferior de la dreta.

Definició 6 (determinant triangular superior). Un determinant és diu que és *triangular superior* si, i només si, els elements per davall de la diagonal principal són zero. D'aquesta manera, els elements del triangle superior de la diagonal són, en principi, diferents de zero.

Definició 7 (determinant triangular inferior). Un determinant és diu que és *triangular inferior* si, i només si, els elements per damunt de la diagonal principal són zero, és a dir, els elements del triangle inferior de la diagonal són, en principi, diferents de zero.

Si no volem especificar el tipus de determinant, parlarem de determinants *triangulars*. També hem de notar que potser alguns dels elements que es trobin dins el triangle que forma el determinant triangular siguin també iguals a zero.

Exemple 7. Per exemple, els determinants

a)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

són determinants triangulars superior i inferior, respectivament.

Definició 8 (determinant diagonal). Un determinant es diu que és *diagonal* quan té els elements fora de la diagonal principal iguals a zero.

Alguns o tots els elements de la diagonal poden ser també zero.

Exemple 8. El determinant següent

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

és un determinant diagonal

Noteu que els determinants diagonals són casos particulars de determinants triangulars

Proposició 1. *Si Δ és un determinant triangular, aleshores el seu valor és el producte dels elements de la diagonal:* $\Delta = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Exemple 9. Els valors dels determinants de l'exemple 8 i l'exemple 7 són, respectivament, iguals a 0, -28 i 40.

Aquest resultat, juntament amb la regla de Chió, facilita moltíssim el càlcul dels determinants.

1.6 Exercicis proposats

Exercici 6. Calculeu el valor dels determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix}$ *e*) $\begin{vmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

Exercici 7. Calculeu el valor dels determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -7 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -20 & -7 & 4 \end{vmatrix}$

Exercici 8. Calculeu el valor dels determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} 6n & 6p \\ 6l & 6m \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix}$

si sabem que:

$$\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -13$$

Exercici 9. De les expressions següents, indiqueu quines són correctes i, en el seu cas, enunecieu les propietats que s'hi utilitzen:

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

Exercici 10. Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$ i $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} = -5$, quin és el valor de cadascun dels determinants següents?[1] Justifiqueu les respostes.

a) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

Exercici 11. Si sabem que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5,$$

[1] Es pot veure fàcilment que $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$ fent el càlcul directe i aplicant que el producte de nombres és una operació associativa. Més endavant es pot demostrar aquest aplicant directament la transposició de matrius (Secció 2.3, Element *b*)).

calculeu el valor dels determinants següents:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}.$$

Exercici 12. Resoleu les equacions següents:

$$a)\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$b)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$c)\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Exercici 13. Per a quin valor de x s'anul · la el determinant següent?

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

Exercici 14. Resoleu l'equació següent:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Exercici 15. Trobeu, en funció de a, el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

2

Matrius

2.1 Definicions

Definició 9 (matriu). Una *matriu* és una col · lecció de nombres disposats en fileres i columnes. Es diu *quadrada* si aquesta disposició té tantes fileres com columnes; en cas contrari es diu *rectangular*.

Exemple 10. Són exemples de matrius les següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La primera és una matriu rectangular i la segona és una matriu quadrada.

Definició 10 (ordre d'una matriu). L'*ordre* d'una matriu és el nombre de fileres i columnes que té, i s'escriu de la forma $n \times m$, on n és el nombre de fileres i m és el nombre de columnes.

De vegades també s'anomena *dimensió* de la matriu.

En el cas de les matrius quadrades es sol indicar el seu ordre únicament amb el nombre de fileres (o columnes).

Exemple 11. A l'exemple anterior la primera és d'ordre 2×3, i la segona és d'ordre 2×2, o bé, simplement, d'ordre 2.

En general, una matriu A d'ordre $n \times m$ tendrà l'aspecte

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

o bé de forma compacte $A = (a_{ij})$ on $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, m$. Per tant, en últim terme, una matriu d'ordre $n \times m$ no és res més que una successió de $n \cdot m$ nombres, que, per diverses raons, s'ha preferit escriure en forma de quadre.

Notació 1 (conjunt de les matrius). El conjunt de totes les matrius d'ordre $n \times m$ s'indica per $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ o, simplement, $\mathcal{M}_{n\times m}$. Si $m = n$, es sol escriure $\mathcal{M}_n$.[1]

Tipus de matrius

Definició 11 (matriu nul·la). Una matriu és *nul·la* quan tots els seus elements són iguals a zero, és a dir, $a_{ij} = 0$, per a tot i, j.

Exemple 12. Les matrius

a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

són nul·les (d'ordre 3×4 i 3×3 respectivament).

Definició 12 (matriu oposada). Donada una matriu A, la seva *oposada* és la matriu formada pels elements d'A amb signe oposat, és a dir, $-A = (-a_{ij})$.

Exemple 13. La matriu $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -a & 6 \end{pmatrix}$ és la matriu oposada de la matriu $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & a & -6 \end{pmatrix}$.

Definició 13 (matriu filera). Una matriu es diu *matriu filera* si només té una filera, és a dir, quan és d'ordre $1 \times m$.

Definició 14 (matriu columna). Una matriu s'anomena *matriu columna* si només té una columna, o sigui quan té ordre $n \times 1$.

Exemple 14. Les matrius

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

són matrius filera i columna respectivament.

[1] La raó de tenir $\mathbb{R}$ és especificar que les entrades de la matriu pertanyen al conjunt de nombres reals $\mathbb{R}$.

A l'igual que pels determinants, tenim el concepte de diagonal principal per a les matrius.

Definició 15 (diagonal principal). S'anomena *diagonal principal* d'una matriu quadrada al conjunt d'elements que van del vèrtex superior esquerre a l'inferior de la dreta.

Exemple 15. A la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

els nombres $3, -1$ i 7 són els que formen la diagonal principal.

Definició 16 (matriu unitat). Es diu *matriu unitat* (o *matriu identitat*) a aquella matriu quadrada en la qual tots els elements de la diagonal principal són uns i la resta d'elements són zeros. Es simbolitza per I o Id. Si es vol indicar el seu ordre, aleshores s'indica mitjançant un subíndex:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

són les matrius unitat d'ordre 2, d'ordre 3, etc.

Definició 17 (matriu triangular). Una matriu $A = (a_{ij})$ es diu *triangular* quan $a_{ij} = 0$ per a tot $i < j$ o bé quan $a_{ij} = 0$ per a tot $i > j$. En paraules, quan els elements per davall o per damunt de la diagonal principal són zero.

Definició 18 (matriu diagonal). Una matriu $A = (a_{ij})$ s'anomena *diagonal* si, i només si, $a_{ij} = 0$ per a tot $i \neq j$, és a dir, els elements que no estan a la diagonal principal són zero.

Observació 2. Una matriu no té res que veure amb un determinant: un determinant és un nombre i una matriu una col·lecció de nombres. Encara que a tota matriu quadrada li podem associar un determinant, que es denota per $|A|$ o bé $\det(A)$.

Igualtat entre matrius

Definició 19 (igualtat de matrius). Direm que dues matrius són *iguals* si són del mateix ordre i els seus elements respectius són iguals.

Exemple 16. Per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3-3 \\ \pi & 24/2 & -4 \end{pmatrix}$$

són iguals.

Exercici 16. Calculeu el valor de x perquè les matrius A i B siguin iguals, amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -x+4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Operacions amb matrius

A continuació es defineixen les operacions que es poden realitzar amb matrius.

2.2.1 Suma i diferència de matrius

Definició 20 (suma i resta de matrius). La *suma* de dues matrius del mateix ordre es fa sumant els elements respectius. La *diferència* (o resta) es calcula restant els elements corresponents.

És a dir, si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són dues matrius d'ordre $n \times m$, aleshores les matrius $A + B$ i $A - B$ són iguals $(a_{ij} + b_{ij})$ i $(a_{ij} - b_{ij})$, respectivament, i tenen ordre $n \times m$.

Exemple 17. Vegem una diferència de matrius:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-(-1) & 3-5 \\ 5-5 & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La suma es fa de manera anàloga.

Exercici 17. Calculeu $A - B$, $B - A$ i $-A + B$, amb

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Multiplicació d'un nombre per una matriu

Definició 21 (multiplicació de nombres i matrius). Per *multiplicar un nombre per una matriu* es multiplica aquest nombre per cadascun dels elements de la matriu.

De vegades aquest nombre s'anomena *escalar*.

Exemple 18.

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 & -5 \cdot (-2) & -5 \cdot 0 \\ -5\pi & -5 \cdot 12 & -5 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -5\pi & -60 & 20 \end{pmatrix}$$

Exercici 18. Calculeu

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Producte de dues matrius

No sempre és possible multiplicar dues matrius. Per aquest motiu, abans de definir la multiplicació de dues matrius hem de veure quina condició han de complir les matrius que volem multiplicar per a que aquesta operació es pugui fer.

Condició 1 (producte de dues matrius). *Per poder multiplicar dues matrius s'ha de complir que el nombre de columnes de la primera matriu (la que es col·loca a l'esquerra) ha de coincidir amb el nombre de fileres de la segona (la que es col·loca a la dreta).*

Aquesta condició, a més de ser necessària per a la multiplicació de dues matrius, és suficient.

Degut a què el nombre de fileres i de columnes de dues matrius poden ser qualssevol, pot ocorre que es pugui calcular el producte $A \cdot B$ de les matrius A i B, però que no es pugui calcular $B \cdot A$.

Exemple 19. No podem calcular el producte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

però sí podem calcular el producte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vegem ara com es multipliquen dues matrius.

Definició 22 (multiplicació de matrius). Siguin A i B dues matrius d'ordres $n \times m$ i $m \times p$ respectivament. El seu producte

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{m2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}$$

té ordre $n \times p$ i es calcula de la manera següent:

1. L'element c_{ij}, que és l'element del resultat $A \cdot B$, es calcula multiplicant la filera i-èssima de A per la columna j-èssima de B, és a dir,

   $$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{im} \cdot b_{mj}$$

   (l'element c_{11} s'obté multiplicant la filera 1 de A per la columna 2 de B, l'element c_{12} s'obté multiplicant la filera 1 de A per la columna 2 de B, etc.)

2. Això es realitza per a totes les fileres i columnes

Amb aquesta definició, l'ordre de la matriu $A \cdot B$ és $n \times p$. Esquemàticament:

$$\underset{n\times m}{A} \cdot \underset{m\times p}{B} = \underset{n\times p}{AB}$$

Exemple 20.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2(-2)+0{\cdot}3+(-3)(-4) & 2(-1)+0{\cdot}5+(-3){\cdot}0 & 2{\cdot}0+0{\cdot}2+(-3){\cdot}6 \\ \\ 0(-2)+1{\cdot}3+1(-4) & 0(-1)+1{\cdot}5+1{\cdot}0 & 0{\cdot}0+1{\cdot}2+1{\cdot}6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -18 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

És a dir, l'element que ha d'anar, per exemple, a la 2a filera i 1a columna es calcula sumant els productes dels elements de la 2a filera de la primera matriu amb els elements de la 1a columna de la segona matriu.

Exercici 19. Calculeu els productes de matrius següents:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Transposició d'una matriu

Definició 23 (transposició de matrius). La *transposició* d'una matriu és l'operació per la qual es canvien de manera ordenada les fileres per les columnes (i viceversa). La *matriu transposta* de la matriu A es representa per A^t.

Exemple 21. La matriu transposta de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -18 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

és la matriu

$$A^t = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 5 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercici 20. Escriviu les transpostes de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Propietats de les operacions amb matrius

Propietats de la suma de matrius

Siguin A, B i C matrius d'ordre $m \times n$. Aleshores, es compleixen les següents propietats:

a) Associativa:
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

b) Commutativa:
$$A + B = B + A$$

Propietats del producte de nombres per matrius

Siguin a i b nombres reals, i A i B matrius d'ordre $m \times n$. Aleshores, es compleixen les següents propietats:

a) Pseudoassociativa: $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$

b) Distributiva respecte la suma d'escalars: $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

c) Distributiva respecte la suma de matrius: $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

d) Element neutre: $1 \cdot A = A$

Propietats del producte de matrius

a) Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

b) Element neutre: $A \cdot I = I \cdot A = A$

c) Commutativa: en general, com ja hem observat, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Propietats distributives

a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

b) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

Propietats de la transposició de matrius

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Propietats dels determinants de matrius

a) El determinant del producte de dues matrius és igual al producte dels seus determinants, és a dir,

$$|A{\cdot}B| = |A| \cdot |B|$$

b) El determinant d'una matriu (quadrada) A és igual al determinant de la seva matriu transposta, és a dir,

$$|A| = \left|A^t\right|.$$

Exemple 22. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenim que $|A| = -3$ i $|B| = 2$ i, per tant, $|A| \cdot |B| = -6$, que coincideix amb

$$|A{\cdot}B| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Exemple 23. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

es té que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 \quad \text{i} \quad \left|A^t\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -16.$$

2.4 Matriu inversa d'una matriu quadrada

Definició 24 (matriu inversa). Donada una matriu quadrada A, la seva *matriu inversa*, que es denota per A^{-1}, és una matriu del mateix ordre tal que compleix les condicions següents de forma simultània:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= I, \\ A^{-1} \cdot A &= I. \end{aligned}$$

Noteu que una condició per a què una matriu tengui inversa és que sigui quadrada. Les matrius rectangulars no tenen matriu inversa perquè un dels productes no existeix (vegeu condició 1).

Definició 25 (matriu regular). Les matrius que tenen inversa s'anomenen *matrius regulars*. En altre cas, es diu que la matriu és *singular*.

Exemple 24. No totes les matrius són regulars: per exemple la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

no té inversa, ja que si en tingués arribaríem a un error: si suposem que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, aleshores s'hauria de complir que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el que implica que

$$\begin{cases} a - c = -1 \\ b - d = 0 \\ -a + c = 0 \\ -b + d = 1 \end{cases}$$

Però la primera i la segona equació impliquen que $0 = 1$. Contradicció!.

Teorema 2. *Una matriu quadrada A és regular si, i només si, $|A| \neq 0$. És a dir*

$$A \text{ té inversa} \iff |A| \neq 0$$

Expressat amb paraules:

a) *Si una matriu quadrada té inversa, aleshores el seu determinant és diferent de zero*

b) *I si el determinant d'una matriu quadrada no val zero, aleshores aquesta matriu té inversa.*

Ara sabem quina condició s'ha de complir per a què una matriu sigui regular, però com es calcula la matriu inversa d'una matriu quadrada? A continuació ho veurem.

Teorema 3 (càlcul de la matriu inversa). *Si A és regular, aleshores*

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|},$$

on $Adj(A)$ denota la matriu adjunta d'A, formada pels adjunts dels elements de A.

Algorisme 3 (càlcul de la matriu inversa). *Per calcular la matriu inversa d'una matriu quadrada A seguirem les passes següents:*

1. *En primer lloc calcularem $|A|$. Si aquest val 0, ja podem assegurar que la matriu A no té inversa. Si $|A| \neq 0$, seguim amb els punts següents.*

2. *Calculam la matriu adjunta de A, és a dir, $Adj(A)$.*

3. *Farem la transposta de $Adj(A)$. La denotarem per $(Adj(A))^t$.*

4. *Finalment, es té que*

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|}$$

Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 25. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenim que

$$|A| = -9 - 16 = -25 \neq 0$$

El fet de què aquest determinant no valgui zero ens assegura que existeix la matriu inversa de A. Anem a calcular-la.

La matriu adjunta de A és

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -9 & -8 & 12 \\ -6 & 3 & 8 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

La transposta de l'adjunta és, aleshores,

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \\ 12 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa de A és:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -9 & -6 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \\ 12 & 8 & -3 \end{pmatrix}}{-25} = \begin{pmatrix} 9/25 & 6/25 & 4/25 \\ 8/25 & -3/25 & -2/25 \\ -12/25 & -8/25 & 3/25 \end{pmatrix}$$

Exercici 21. Calculeu, si en té, la matriu inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2.4.1 Matriu inversa en funció d'un paràmetre

Exemple 26. Suposem que volem calcular la matriu inversa de

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu depèn del paràmetre a. Per tant, podem suposar que la matriu inversa de B existirà o no segons el valor numèric que prengui el paràmetre a. ¿Què ha de valer a per a què existeixi B^{-1}? Aquest valor de a quedarà imposat per la condició

$$|B| \neq 0,$$

que és la condició que ens assegura que existeix la matriu inversa de B. Calculem $|B|$:

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 21a - 7$$

Aquest determinant val 0 si, i només si, quan $21a - 7 = 0$. És a dir, quan $a = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$. Aquí apareixen dues possibilitats:

a) Si $a = 1/3$, tenim que $|B| = 0$, i, per tant, no existeix la matriu inversa de B.

b) Si $a \neq 1/3$, aleshores $|B| \neq 0$, i, per tant, existeix B^{-1}. En aquest cas, podem calcular la matriu inversa de B, que òbviament dependrà del paràmetre a

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & a \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-7a & -1 & 7 \\ -1 & -3 & 21 \\ a & 3a & -7 \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu inversa de B és:

$$B^{-1} = \frac{(Adj(B))^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 2-7a & -1 & a \\ -1 & -3 & 3a \\ 7 & 21 & -7 \end{pmatrix}}{21a-7} = \begin{pmatrix} \frac{2-7a}{21a-7} & \frac{1}{7-21a} & \frac{a}{21a-7} \\ \\ \frac{1}{7-21a} & \frac{3}{7-21a} & \frac{3a}{21a-7} \\ \\ \frac{7}{21a-7} & \frac{21}{21a-7} & \frac{7}{7-21a} \end{pmatrix}$$

Exercici 22. Calculeu la matriu inversa de B en funció del paràmetre α, amb

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2.5 Rang d'una matriu d'ordre qualsevol

Definició 26 (menor d'una matriu). Si en una matriu qualsevol (no necessàriament quadrada) seleccionam p fileres i p columnes, els elements en què s'encreuen aquestes p fileres i p columnes formen una submatriu quadrada d'ordre p. El determinant d'aquesta submatriu s'anomena *menor d'ordre p* (o simplement *menor*) de la matriu inicial.

Exemple 27. De la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ \pi & 12 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \pi & -4 \end{vmatrix}$$

és un menor d'ordre 2.

En aquest cas, hem seleccionat els elements en els quals s'encreuen les fileres 1 i 2 i les columnes 1 i 3.

Definició 27 (rang d'una matriu). Donada una matriu qualsevol A, es defineix el seu *rang* al màxim ordre dels seus menors no nuls. És a dir, el rang d'una matriu és un nombre p que compleix les condicions següents:

a) Existeix un menor no nul d'ordre p

b) Tots els menors d'ordre $p+1$ són nuls, o bé no existeixen menors d'ordre $p+1$.

En altres paraules, calculem el

$$\max\{p \mid \text{ existeix un menor d'ordre } p \text{ no nul }\}.$$

El rang d'una matriu A es representa per $rg\,(A)$ o simplement rgA.

Exemple 28. El rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

és 3, ja que existeix, al menys, un menor d'ordre 3 no nul, com, per exemple, el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

i no hi ha cap menor d'ordre 4.

Tot seguit, veurem com podem calcular el rang d'una matriu de forma efectiva. Per això, hem d'introduïr el concepte d'independència lineal. En primer lloc, recordem la definició de combinació lineal (veure definició 4): una línia L és *combinació lineal* de n línies L_1, L_2, ..., L_n si, i només si, podem obtenir la línia L com a suma de les línies L_1, ..., L_n prèviament multiplicades per nombres reals, és a dir,

$$L = a_1 \cdot L_1 + a_2 \cdot L_2 + \ldots + a_n \cdot L_n.$$

Definició 28 (dependència lineal). Una línia és *linealment dependent* de n línies L_1, L_2, ..., L_n si, i només si, L es pot expressar com a combinació lineal de L_1, ..., L_n.

En cas contrari, L és *linealment independent*, és a dir, no existeixen cap nombres a_1, ..., a_n tals que L sigui igual a $a_1 \cdot L_1 + \ldots + a_n \cdot L_n$.

Proposició 4 (fites del rang d'una matriu). *Es pot veure que, si A és una matriu qualsevol d'ordre $n \times m$, aleshores:*

a) *rgA és igual al nombre de línies linealment independents*

b) $rgA \leq \min\{m, n\}$

c) *$rgA \geq 0$. I $rgA = 0$ si, i només si, A és igual a la matriu nul·la.*

d) *Si A no és la matriu nul·la, aleshores $rgA \geq 1$.*

Algorisme 4 (càlcul del rang d'una matriu de dalt a baix). *Per a calcular el rang d'una matriu A d'ordre $n \times m$ es segueixen els passos següents:*

a) *Es calcula el mínim del nombre de fileres i columnes d'A, és a dir, $r = \min\{n, m\}$. Aquest és el rang màxim que pot tenir A.*

b) *Es calculen els menors d'ordre r d'A. Si algun d'aquests és no nul, aleshores automàticament $rgA = r$. En cas contrari, $rgA < r$.*

Notem que només calcularem tots *els menors d'ordre r quan* tots *ells sigui nuls. Tot d'una que trobem un menor d'ordre r no nul, ja no calcularem cap més menor d'ordre r i conclourem que $rgA = r$.*

c) *Es procedeix de manera anàloga al pas anterior pels menors d'ordre $r - 1$ i es conclou que $rgA = r - 1$ o bé $rgA < r - 1$.*

d) *Es repeteixen aquestes passes successivament.*

Exemple 29. Suposem que volem calcular el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Per la proposició 4, tenim que $rgA \leq \min\{3, 4\} = 3$.

b) Hem de veure si existeix un menor d'ordre 3 no nul. Hi ha quatre possibilitats per a formar menors d'ordre 3: *a*) triar les columnes 1, 2 i 3, *b*) triar les columnes 1, 2 i 4, *c*) triar les columnes 1, 3 i 4 i *d*) triar les colimnes 2, 3 i 4. Si algun d'aquests menors fos no nul, aleshores el rang d'A seria 3. Ara bé,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $rgA < 3$.

c) Vegem si és dos: existeix un menor no nul d'ordre 2? Sí, per exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$. Per la qual cosa, $rgA = 2$.

Exercici 23. Calculeu el valor del rang de la matriu següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

2.5.1 Rang d'una matriu en funció d'un paràmetre

De vegades, una matriu pot incloure un paràmetre. El rang d'aquesta matriu dependrà, aleshores, del valor que tengui aquest paràmetre. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 30. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Anem a calcular el seu rang. De manera anàloga a l'exemple 29, calcularem el rang d'A arran dels menors més grans possibles. Així, en aquest exemple començarem amb

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 2\alpha + 6 - 4\alpha = 16 - 2\alpha,$$

que és el menor més gran que es pot treure a partir d'A. Aquest menor val 0 si, i només si, $16 - 2\alpha = 0$, és a dir, quan $\alpha = 8$.

Diferenciem casos:

a) Si $\alpha \neq 8$: existeix un menor d'ordre 3 diferent de 0 ($\Delta \neq 0$), i no hi ha menors d'ordre superior a 3 ($rgA \leq 3$). Per tant, el rang de A és 3.

b) Si $\alpha = 8$: tots els menors d'ordre 3 (de fet, l'únic menor d'ordre 3 en aquest cas) són zero. Per tant, $rgA < 3$. Cerquem, aleshores, un menor d'ordre 2 diferent de 0. Per exemple

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

per la qual cosa el rang és 2.

En conclusió, si $\alpha \neq 8$, aleshores $rgA = 3$. I si $\alpha = 8$, aleshores $rgA = 2$.

Exercici 24. Calculeu rgA en funció del paràmetre α, on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

2.6 Exercicis proposats

Exercici 25. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu, si és possible, AB i BA.

Exercici 26. Calculeu $3AA^t - 2I$, amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 27. Comproveu que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ amb les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercici 28. Determineu els valors de m per als quals es verifica que $X^2 - \frac{5}{2}X + I = \mathbf{0}$, amb

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 29. Determineu a i b de forma que es verifiqui que $A^2 = A$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

Exercici 30. Trobeu totes les matrius X de la forma

$$X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ tals que } X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 31. Calculeu dos nombres reals m i n tals que $A + mA + nI = \mathbf{0}$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 32. Siguin A i B les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobeu les condicions que han de complir els coeficientes a, b i c perquè es verifiqui que $AB = BA$.

Exercici 33. Trobeu dues matrius X i Y que verifiquin el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2X - 3Y & = & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Exercici 34. Calculeu, si és possible, la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 35. Calculeu la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & b & 6 \end{pmatrix}$$

Exercici 36. Digueu en funció dels paràmetres corresponents quan les matrius següents són regulars. En cas de ser-ho, trobeu la seva inversa:

a)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \alpha+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

e)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a-1 & -2 & -1 \\ 1 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

f)

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}$$

g)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 4 & 4 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

h)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

i)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

j)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

k)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

l)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ a & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

m)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

o)

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4a \end{pmatrix}$$

p)

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ k & k & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

Exercici 37. Calculeu el rang de cadascuna de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercici 38. Estudieu el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 39. Estudieu el rang de la matriu següent en funció de a, b i c:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

3

Sistemes d'equacions lineals

3.1 Definicions

Definició 29 (sistema d'equacions lineal). Un *sistema d'equacions lineals de m equacions i n incògnites* és un conjunt d'equacions que tenen l'aspecte general següent:

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\},$$

de manera que s'han de verificar conjuntament.

Anomenarem:

a) A x_1, ..., x_n les *incògnites* del sistema

b) A a_{ij}, on $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$, els *coeficients* del sistema

c) A b_1, ..., b_m els *termes independents* del sistema

Una *solució* del sistema és un conjunt de valors c_1, ..., c_n de manera que verifiquen simultàniament cada equació, és a dir,

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}\cdot c_1 + a_{12}\cdot c_2 + \ldots + a_{1n}\cdot c_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot c_1 + a_{22}\cdot c_2 + \ldots + a_{2n}\cdot c_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\cdot c_1 + a_{m2}\cdot c_2 + \ldots + a_{mn}\cdot c_n & = & b_m \end{array}\right\}.$$

Aquests valors es poden escriure en forma de n-tupla ordenada $(c_1, \ldots, c_n)$.

Resoldre el sistema és trobar totes les n-tuples que són solució d'aquest.

3.2 Tipus de sistemes

Definició 30 (tipus de sistemes lineals). Atenent al nombre de solucions, un sistema pot esser de diversos tipus:

- Si un sistema no té solució, s'anomena *incompatible*
- Si té solució, s'anomena *compatible*
  - Si el sistema té una sola solució, aleshores s'anomena *compatible determinat*
  - Si el sistema té més d'una solució, aleshores s'anomena *compatible indeterminat*. En els sistemes lineals, un sistema compatible indeterminat té infinites solucions (no en pot tenir un nombre finit distint d'1).
    - Un sistema compatible indeterminat es diu *simplement indeterminat* si el conjunt de solucions depèn d'un paràmetre
    - Un sistema compatible indeterminat es diu *doblement indeterminat* si el conjunt de solucions depèn de dos paràmetres[1]

Definició 31 (sistema homogeni). Un sistema d'equacions s'anomena *homogeni* si tots els seus termes independents són iguals a zero. És a dir, els sistemes d'equacions tenen la pinta següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Exemple 31. El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x - y + 6z & = & -9 \\ -x + 3y - 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

[1] Per exemple, les solucions del sistema format per l'única equació $2x - 3y + 4z = 1$ es poden expressar com $y = a$, $z = b$ i $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a - 2b$, on a i b són nombres reals qualsevols (paràmetres).

és compatible, ja que el conjunt de tres nombres $x = -2$, $y = 1$, $z = 0$ és solució del sistema, donat que

$$\left.\begin{array}{rcl} 4\cdot(-2) - 1 + 6\cdot 0 & = & -9 \\ -(-2) + 3\cdot(-1) - 2\cdot 0 & = & -1 \end{array}\right\}$$

En canvi, el conjunt $x = 3$, $y = 27$, $z = 1$ no es solució, ja que alguna de les equacions no es verifica (la segona en aquest cas):

$$\left.\begin{array}{rcl} 4\cdot 3 - 27 + 6\cdot 1 & = & -9 \\ -3 + 3\cdot 27 - 2\cdot 1 & \neq & -1 \end{array}\right\}.$$

Exemple 32. El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 3 \\ x + y & = & 2 \end{array}\right\}$$

és incompatible (no tiene solució), ja que no existeixen dos nombres, x i y, tals que la seva suma sigui, a la vegada, 3 i 2 (o la suma dóna 3 o dóna 2, pero no els dos valors de cop).

3.3 Sistemes matricials

Per resoldre sistemes d'equacions de forma còmoda, és necessari passar de la seva forma algebraica clàssica (com a conjunt d'equacions) a una forma matricial (com a igualtat entre matrius). Això facilitarà enormement esbrinar el nombre de solucions d'un sistema i el seu càlcul.

Un sistema de m equacions i n incògnites x_1, ..., x_n adopta la forma general:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}.$$

Aquest es pot expressar de forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

o bé en la forma més compacte

$$A \cdot x = b,$$

on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

La matriu A s'anomena *matriu de coeficients del sistema*, la matriu (filera) b s'anomena *matriu de termes independents* i x reb el nom de *matriu de variables*.

Anomenarem *matriu ampliada (o completa) del sistema* i la representarem com a M, a la matriu d'ordre $m \times (n+1)$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Exemple 33. Per exemple, en el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x - y + z & = & 0 \\ x + 3z & = & -2 \end{array}\right\}$$

les incògnites són x, y i z, i els termes independients són 0 i -2. La matriu dels coeficients i la matriu ampliada són, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple 34. El sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 4x - y + 6z & = & -9 \\ -x + 3y - 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

és el mateix que

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.4 Regla de Cràmer

La regla de Cràmer permet trobar la solució de sistemes d'equacions lineals en els que es verifiquin, simultàniament, les condicions següents:

- Hi ha tantes equacions com a incògnites
- La matriu de coeficients té determinant no nul

Amb aquestes condicions, la regla de Cràmer permet trobar la solució del sistema. En aquest cas, podem assegurar que només existeix una única solució (el sistema és compatible determinat), però això ho veurem més endavant (Secció 3.5).

Algorisme 5 (regla de Cràmer). *Sigui*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\}.$$

un sistema d'equacions d'n equacions amb n incògnites tal que el determinant $|A|$ de la seva matriu de coeficients A és no nul. Aleshores, el sistema té una sola solució, $(x_1, \ldots, x_n)$, que ve donada per:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Exemple 35. Sigui el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x - y + z & = & 0 \\ x + 3z & = & -2 \\ x + y & = & 1 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema té 3 equacions i 3 incògnites i, a més, es compleix que

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 1 - 6 = -8 \neq 0$$

Per tant, podem aplicar la regla de Cràmer, amb el que la solució del sistema és:

$$x \;=\; \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7}{-8} = \frac{-7}{8}$$

Per tant, $(5/8, 3/8, -7/8)$ és la solució del sistema d'equacions.

Exercici 40. Resoleu el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcr} -x - 2y + 5z & = & -3 \\ 3x + 3z & = & 4 \\ 2x - 2y + z & = & 0 \end{array}\right\}$$

3.5 Discussió d'un sistema de equacions

Per suposat, no tots els sistemes d'equacions lineals tenen tantes equacions com incògnites, i fins i tot en aquest cas, no tots compleixen que el determinant de la seva matriu de coeficients sigui no nul. Per tant, la regla de Cràmer no és aplicable en aquests casos. Ara bé, tendrem algorismes per a la resolució dels sistemes d'equacions més generals (Secció 3.6)

Ara bé, abans d'ocupar-nos de la resolució general dels sistemes d'equacions lineals, ens interessarem sobre els criteris que han de complir per a què aquests tenguin solució. És a dir, estudiarem en quins casos un sistema d'equacions té solució i, en aquest cas, quantes en té. D'aquesta manera, podem assegurar-nos que, abans de resoldre un sistema d'equacions, aquest té una solució i, per tant, no començarem a resoldre sistemes que no tenguin solució, amb el conseqüent guany de temps.

Teorema 5 (teorema de Rouché-Frobenius). *Sigui un sistema d'equacions lineals qualsevol amb n incògnites. I siguin A la matriu de coeficients i M la matriu ampliada. Aleshores:*

- $rgA \neq rgM \iff$ *El sistema és incompatible (no té solució)*
- $rgA = rgM \iff$ *El sistema és compatible (té solució)*
  - $rgA = rgM = n \iff$ *El sistema és compatible determinat (té una única solució)*
  - $rgA = rgM < n \iff$ *El sistema és compatible indeterminat (té infinites solucions)*

D'aquesta manera, per saber si un sistema d'equacions té solució o no, en primer lloc s'han de calcular els valors de rgA i rgM i procedir a classificar el sistema segons la taula anterior.

Observació 3. Recordem que el rang d'una matriu és el nombre de línies linealment independents (proposició 4). Per tant, clarament, tenim que

$$rgA \leq rgM$$

Notem que, en el cas d'un sistema homogeni, aquest desigualtat realment és una igualtat, és a dir, $rgA = rgM$.

Observació 4. La idea que s'amaga darrera del teorema de Rouché-Frobenius (teorema 5) és analitzar si una equació és combinació lineal de les altres: si això passa, aleshores la podem suprimir del sistema, ja que aquesta equació no ens aporta cap informació. Per exemple, en el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+3y+4z & = & 2 \\ x+2y+3z & = & 1 \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right\}$$

tenim que la tercera equació és combinació lineal de les dues primeres ($L_3 = L_1 - L2$). En el nostre cas, això és el mateix que dir que el rang de la matriu ampliada és menor que 3 (el nombre d'incògnites), per aplicació de proposició 4, ja que les fileres de la matriu ampliada són les equacions del sistema d'equació. Si el rang de la matriu ampliada coincideix amb el nombre d'incògnites, vol dir que totes les equacions són linealment independents i, per tant, no n'hi ha cap que sigui deduïble de les altres.

D'altra banda, la comparació entre els rangs de la matriu ampliada i la matriu de coeficients ens dóna informació sobre la compatibilitat del sistema. Per a què un sistema tengui solució, la independència lineal de les seves equacions ha de ser la mateixa que la independència lineal de les equacions considerades sense termes independents.

Exemple 36. Sigui el sistema de equacions

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x-y+z & = & 0 \\ x+3z & = & -2 \\ 3x-y+4z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Per a determinar quin tipus de sistema és, hem de calcular els rangs de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- Com que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

aleshores $rgA < 3$. Si cercam un menor d'ordre 2, en trobem un no nul:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Per tant, $rgA = 2$.

- Com que $rgA = 2$ i $rgA \leq rgM$, sabem que $rgM \geq 2$. Hem de veure si rgM pot ser igual a 3. Per aixo, hem de calcular tots els menors d'ordre 3 de M. Ara bé,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

pel que $rgM = 2$.

- Per tant, $rgA = rgM = 2 < 3$. Per la qual cosa, aquest sistema és compatible indeterminat. Per tant, té un nombre infinit d'incògnites.

Exercici 41. Clasifiqueu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ x - 3z & = & 3 \\ 3x - 3y - 2z & = & 3 \end{array}\right\}$$

3.5.1 Discussió d'un sistema de equacions en funció d'un paràmetre

Quan en un sistema apareix un paràmetre en els termes independents o en els coeficients del sistema, aleshores la classificació d'aquest depèn del valors que té aquest paràmetre.

Exemple 37. Sigui el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x - 3y + 5z & = & 0 \\ x - 3z & = & -2 \\ 3x - \alpha y + 2z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Estudiem els valors dels rangs de les seves matrius de coeficients i ampliada en funció del paràmetre α.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -\alpha & 2 \end{vmatrix} = 33 - 11\alpha$$

Pel que, $|A|$ valdrà zero si, i només si, $33 - 11\alpha = 0$, és a dir, si $\alpha = 3$. D'aquí es segueix que hem de diferenciar casos:

a) Si $\alpha \neq 3$, aleshores $|A| \neq 0$. Per tant, $rgA = 3$. I, per tant, com que $rgA \leq rgM \leq 3$, tenim que $rgM = 3$. I tenim tres incògnites, pel que el sistema és compatible determinat (té una única solució per a cada valor concret de α).

b) Si $\alpha = 3$, aleshores les matrius de coeficients i ampliades són:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, sabem que $rgA < 3$ (l'únic menor d'ordre 3, $|A|$, és zero). I com que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

aleshores $rgA = 2$ (hi ha un menor d'ordre dos no nul).

Queda ara calcular el rang de M. Sabem segur que rgM com a mínim és 2. Hem de veure si pot ser tres. Per això, calculem tots els menors d'ordre tres:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, $rgM = 2$.

En resum, si $\alpha \neq 3$, el sistema és compatible determinat. I si $\alpha = 3$, el sistema és compatible indeterminat.

Exercici 42. Clasifiqueu el sistema següent en funció del paràmetre α:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ \alpha x - 3z & = & 3 \\ 3x - 3y - 2z & = & 3 \end{array}\right\}$$

Notem que l'aplicació del teorema de Rouché-Frobenius (teorema 5) no proporciona la solució del sistema, sinó tan sols quantes en té. En l'apartat següent es mostra com trobar aquestes solucions.

3.6 Resolució d'un sistema d'equacions

La resolució d'un sistema d'equacions varia lleugerament segons si aquest és un sistema compatible determinat o un sistema compatible indeterminat. Ara bé, a grans trets, sempre es realitzen els mateixos passos:

- En primer lloc, s'esbrina si el sistema és compatible o incompatible usant el teorema de Rouché-Frobenius (teorema 5). En cas de què el sistema sigui incompatible, s'ha acabat (no hi ha solució per tant no es pot calcular).
- Quan es té un sistema compatible, es determina si aquest és determinat o indeterminat.
- En el primer cas, usant la regla de Cràmer es resol el sistema i es calcula la seva única solució. En l'altra cas, es transforma el sistema en un altre compatible determinat, el qual depèn d'un paràmetre, i es calcula la seva solució, aplicant de nou la regla de Cràmer. En aquest cas, s'obté una solució que depèn d'un paràmetre.

Vegem els dos tipus de sistemes a continuació.

3.6.1 Sistema compatible determinat

Exemple 38. Sigui el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x-2y+3z & = & -2 \\ 4x-3y & = & 0 \\ y+z & = & -1 \\ 3x-2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Volem resoldre aquest sistema. Per fer-ho, escrivim les matrius de coeficients i ampliada, respectivament:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i calculem els seus rangs:

- A té un menor d'ordre 3 no nul:
$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0,$$
Per tant, $rgA = 3$ (recordem que $rgA \leq 3$ perquè no hi pot haver menors d'ordre 4).
- $|M| = 0$, ja que
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
(que és l'únic menor d'ordre 4 de M). Per tant, $rgM = 3$.

- Com que $rgA = rgM = 3$, aleshores el sistema és compatible determinat (teorema de Rouché-Frobenius)

Per tant, per ara sabem que el sistema té una solució i que aquesta és única, però encara no sabem com calcular-la. El pas següent és reduïr el nombre d'equacions del sistema: el nostre sistema té tres incògnites i quatre equacions. Per tant, de qualque manera, *sobra* una equació. Per saber quina sobra, trobarem quines equacions són (linealment) independents unes de les altres. Ara bé, hem vist que el menor

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

era diferent de zero. Aquest menor correspon a les fileres 2a, 3a i 4a. Això vol dir que les equacions 2a, 3a i 4a són independents unes de les altres (tres línies són linealment independents si el seu determinant no és zero). O sigui, la primera equació és redundant (és combinació lineal de les altres).

Aleshores, a partir d'ara les úniques equacions que es tendran en compte seran la segona, la tercera i la quarta. El nostre sistema és ara:

$$\left.\begin{array}{rcr} 4x - 3y & = & 0 \\ y + z & = & -1 \\ 3x - 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

Ara el nostre sistema compleix les condicions de la regla de Cràmer ($\Delta \neq 0$ i hi ha tantes equacions com a incògnites). Aleshores, aplicant aquesta regla es té que la seva solució és:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{3}{-17} = \frac{-3}{17} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{4}{-17} = \frac{-4}{17} \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{13}{-17} = \frac{-13}{17} \end{aligned}$$

Per tant, l'única solució del sistema és:

$$x = \frac{-3}{17},\ y = \frac{-4}{17},\ z = \frac{-13}{17}$$

Exercici 43. Resoleu el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcr} 4x+y & = & -1 \\ -x+3y & = & 2 \\ 3x+4y & = & 1 \end{array}\right\}$$

3.6.2 Sistema compatible indeterminat

Exemple 39. Sigui el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 6x+y-3z & = & 1 \\ 2x-y+z & = & -1 \\ 10x-y-z & = & -1 \end{array}\right\}$$

La matriu de coeficients i la matriu ampliada són, respectivament

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, hem de calcular rgA i rgM per a saber de quin tipus de sistema es tracta:

- En primer lloc, calculem el determinant d'A:

  $$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

  Per tant, $rgA < 3$. I com que

  $$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6+6 = 12 \neq 0,$$

  aleshores $rgA = 2$.

- Per a calcular rgM, mirem si existeixen menors d'ordre tres no nuls. Ja sabem que $|A| = 0$. Per tant, ens queden tres menors d'ordre tres a calcular:

  $$\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

  Per tant, el rgM no pot ser 3. I com que $rgA \leq rgM$, tenim que $rgM = 2$.

- Amb tot, el sistema és compatible indeterminat, ja que $rgA = rgM = 2 <$ nombre d'incògnites del sistema. Per tant, té infinites solucions.

El menor que ha decidit el rang d'ambdues matrius ha estat

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Per tant, aquest és el menor que indica quines són les *les equacions i incògnites principals* del sistema. Aquest menor correspon a les fileres 1a i 2a i a les columnes 1a i 3a. Per les que les úniques equacions que es tendran en compte a partir d'ara seran la primer i la segona. D'altra banda, aïllarem a l'esquerra del símbol =, les incògnites x i z (que són la primera i la tercera), i es passaran a la dreta de l'igual els termes de la incògnita y. Aleshores, el nostre sistema és ara:

$$\left.\begin{array}{rcr} 6x - 3z & = & 1 - y \\ 2x + z & = & -1 + y \end{array}\right\}$$

Les incògnites x i z depenen d'una tercera incògnita, y, que pot tenir el valor que es vulgui. És a dir, y és un paràmetre. Per a fer constar aquest fet i no confondre una incògnita amb un paràmetre, es fa el canvi de variable $y = \lambda$, on λ és un nombre real qualsevol. Amb tot el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{rcr} 6x - 3z & = & 1 - \lambda \\ 2x + z & = & -1 + \lambda \end{array}\right\}$$

Ara volem resoldre aquest sistema que té incògnites x i z. Aquest sistema compleix les condicions de la regla de Cràmer (té tantes equacions com a incògnites i el determinant de la matriu de coeficients és no nul, ja que aquest és Δ). Aplicant la regla de Cràmer, s'obté que:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -1+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{12} = \dfrac{-2+2\lambda}{12} = \dfrac{2\,(-1+\lambda)}{2\cdot 6} = \dfrac{-1+\lambda}{6} \\ z & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 1-\lambda \\ 2 & -1+\lambda \end{vmatrix}}{12} = \dfrac{-8+8\lambda}{12} = \dfrac{4\,(-2+2\lambda)}{4\cdot 3} = \dfrac{-2+2\lambda}{3} \end{array}$$

Per tant, les solucions del sistema d'equacions són:

$$x = \frac{-1+\lambda}{6},\ y = \lambda\ z = \frac{-2+2\lambda}{3},$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$ és un nombre qualsevol.

Exercici 44. Resoleu el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcr} x - 5y + 2z & = & -3 \\ -5x - y & = & 2 \\ -4x - 6y + 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

3.6.3 Sistemes d'equacions amb un paràmetre

La solució, en cas d'existir, d'un sistema d'equacions lineals en el que apareix un paràmetre dependrà del valors d'aquest paràmetre. Vegem-ne un exemple.

Exemple 40. Sigui el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha x+y+z &=& 4 \\ x+y+z &=& \alpha \\ x-y+\alpha z &=& 2 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema depèn del paràmetre α. L'existència de solucions i quines siguin aquestes solucions, en cas d'existir, dependrà, doncs, del valor d'α.

La matriu de coeficients i la matriu ampliada són, respectivament:

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, hem de classificar el sistema. Per tant, hem de calcular rgA i rgM. Però, com què ambdues matrius depenen d'α, aquests rangs també dependran d'aquest paràmetre. D'aquesta manera, hem d'estudiar els rangs de A i M en funció d'α.

Comencem, per exemple, amb la matriu de coeficients. Prenem el menor més gran possible:

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-1$$

Aquest menor valdrà zero si, i només si,

$$\alpha^2-1=0 \iff \alpha^2=1 \iff \alpha=\pm 1$$

Per tant, hem de considerar diverses possibilitats:

a) Si $\alpha\neq\pm 1$, aleshores $|A|\neq 0$. Per tant, existeix un menor d'ordre 3 no nul. El que implica que, $rgA=3$. I aleshores $rgM=3$. Per tant, el sistema és compatible determinat. I a més es compleixen les condicions de la regla de Cràmer. Per tant,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2-1}=\frac{-\alpha^2+3\alpha+4}{\alpha^2-1}=\frac{(\alpha-4)(-\alpha-1)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{4-\alpha}{\alpha-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^3-7\alpha+6}{\alpha^2-1}=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha+3)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{\alpha+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2 + 3\alpha - 10}{\alpha^2 - 1} = \frac{(\alpha - 2)(\alpha + 5)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}$$

Per tant, per a cada possible valor de α, tenim una única solució.

b) Si $\alpha = 1$, aleshores les matrius A i M són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esbrinem el rang de M. Per això, calculem tots els seus menors d'ordre 4, excepte $|A|$ que ja hem calculat. Ara bé, no importa calcular-los tots[2], ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Per tant, tenim que $rgM = 3$. Ara bé, $rgA \neq 3$. Per tant, el sistema és incompatible. I per tant, no té solució.

c) Si $\alpha = -1$, aleshores les matrius de coeficients i ampliada són iguals a:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabem que $rgA \neq 3$. D'altra banda, $rgM = 3$, ja que el menor següent és no nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Per tant, de nou, el sistema és incompatible.

3.7 Exercicis proposats

Exercici 45. Apliqueu la regla de Cràmer per resoldre els sistemes següents:

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$

[2] Els altres dos menors donen 0 i 6.

c) $\begin{cases} x+y+2z &= 2 \\ x-z &= 0 \\ y-z &= -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y &= 4 \\ y-z &= 4 \\ 2x+2z &= 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+3y+4z &= 0 \\ -5x-4y-3z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+2y+3z &= 1 \\ 2x-y+z &= 1 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$

Exercici 46. Classifiqueu els sistemes d'equacions següents:

a) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 6x-2y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 5x+z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-y-t=2 \\ z-t=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y-z+t=4 \\ x+y+z-t=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x-y=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases}$

Exercici 47. Discutiu els sistemes següents segons els valors del paràmetre m:

a) $\begin{cases} mx+y+z=4 \\ x+y+z=m \\ x-y+mz=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+my+z=0 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+my+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx+y+z=m \\ x+y+z=3 \\ x+y+mz=3 \end{cases}$

Exercici 48. Resoleu, si es pot, els sistemes següents:

a) $\begin{cases} -x+2y+z=3 \\ 5x-y+4z=3 \\ -3x+3y-5z=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+2y+5z=1 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x-4y+z=-6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y+8z=2 \\ x+3y-z=8 \\ -x+2y+z=-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 6x-4y+7z=11 \\ -x+2y+3z=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -x+y-z=0 \\ -2x+4y-5z=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ x+5y+7z=1 \\ -x-y+5z=1 \end{cases}$

Exercici 49. Resoleu els sistemes compatibles de l'exercici 46.

Exercici 50. Resoleu aquests sistemes compatibles indeterminats:

a) $\left\{\begin{array}{r} -x+2y+z=3 \\ 3x-y+2z=5 \\ x+3y+4z=11 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} 2x+2y+6z=12 \\ x+y+3z=6 \\ 3x-y+z=0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x-2y+z=6 \\ 3x-6y+3z=18 \\ x-2y+z=6 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=10 \\ 2x-y=5 \\ 5x+z=20 \end{array}\right.$

Exercici 51. Discutiu i resoleu els sistemes següents en funció del paràmetre corresponent:

a) $\left\{\begin{array}{r} mx-y-z=m \\ x-y+mz=m \\ x+y+z=-1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} ax+7y+20z=1 \\ ax+8y+23z=1 \\ x-az=1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{r} mx+y=2-2m \\ x+my=m-1 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ ax=2 \\ ay+2z=0 \end{array}\right.$

Exercici 52. Hi ha algun valor d'a per al qual el sistema tengui infinites solucions?

$$\left.\begin{array}{rcl} (a+1)\,x+2y+z & = & a+3 \\ ax+y & = & a \\ ax+3y+z & = & a+2 \end{array}\right\}$$

3.7.1 Problemes de sistemes d'equacions

Exercici 53. En una fàbrica es produeixen cotxes blancs, negres i vermells. Fabriquen 140 cotxes diaris. El nombre de cotxes negres representa 3/5 del nombre de cotxes blancs, i el nombre de cotxes vermells és 1/4 del nombre de cotxes negres. Quants cotxes de cada color es fabriquen cada dia?

Exercici 54. Els diners que porten en Pere, en Joan i n'Àngel sumen 200€. N'Àngel porta la mateixa quantitat de diners que en Pere i en Joan junts, i en Pere porta 3/2 dels diners que porta en Joan. Quants diners porta cadascú?

Exercici 55. La Mariona va tres diumenges seguits a la pastisseria. El primer diumenge compra tres pastissets de moniato, dos de nata i un de xocolata, i es gasta 15,75 €. El segon diumenge compra dos pastissets de moniato, un de nata i un de xocolata, i es gasta 10 €. El tercer dia compra un pastisset de cada tipus i es gasta 7,5 €. Quin és el preu de cada pastisset?

Exercici 56. En una caixa hi ha pomes, peres i plàtans. En total sumen 12 peces de fruita. El triple del nombre de pomes és igual a la suma del nombre de peres i plàtans i el doble del nombre de peres és igual a la suma del nombre de pomes i plàtans. Trobeu el nombre de pomes, peres, i plàtans.

Exercici 57. Dos amics inverteixen 20000 € cadascun. El primer col · loca una quantitat A al 4% d'interès, una quantitat B al 5% i la resta al 6%. L'altre inverteix la mateixa quantitat A al 5%, la quantitat B al 6% i la resta al 4%. Determineu les quantitats A, B i C si el primer obté uns interessos de 1050 € i el segon de 950 €

Exercici 58. Una botiga ha venut 600 exemplars d'un article per un total de 6384€. El preu original era de 12 €, però també han venut còpies defectuoses amb descomptes del 30% i del 40%. Si el nombre de còpies defectuoses venudes va ser la meitat del de còpies en bon estat, calculeu a quantes còpies s'aplicà el descompte del 30%

Exercici 59. Un caixer automàtic conté 95 bitllets de 10, 20 i 50 €, i un total de 2000€. Si el nombre de bitllets de 10€ és el doble que el nombre de bitllets de 20€, calculeu quants de bitllets hi ha de cada tipus.

Exercici 60. La suma de les tres xifres d'un nombre és 7. La xifra de les centenes és igual a la suma de la xifra de les desenes més el doble de la xifra de les unitats. D'altra banda, si s'inverteix l'ordre de la xifres, el nombre original disminueix en 297 unitats. Calculeu les xifres del nombre inicial

Part II

Geometria

En aquest apartat es tractarà la Geometria en dues parts:

- Geometria del pla, que estudia aquells elements geomètrics que es poden representar soble un pla bidimensional.
- Geometria de l'espai, per a elements de tres dimensions.

Tècnicament, s'estudiarà la geometria cartesiana afí i mètrica.

4

Geometria del pla

En aquest tema s'estudiaran els vectors i les rectes definits sobre un espai de dues dimensions.

4.1 Punts

Aquest apartat tracta de l'estudi dels vectors i de les seves operacions a l'espai de dues dimensions. Aquest espai queda representat per uns *eixos de coordenades*, que són dues rectes reglades entre les quals hi ha un angle recte (Figura 4.1):

- L'eix horitzontal s'anomena *eix de les abscises* (o simplement *eix de les X*) i s'anomena amb la lletra X
- L'eix vertical s'anomena *eix de les ordenades* (o simplement *eix de les Y*) i s'anomena amb la lletra Y

En conjunt, els eixos formen el que s'anomena *Pla cartesià*.

Cada punt del pla queda determinat per les seves projeccions sobre cadascun dels eixos, el que s'anomenen *coordenades* (Figura 4.2).

L'*origen de coordenades* és el punt de coordenades $(0, 0)$.

A partir d'aquest moment identificarem un punt amb les seves coordenades.

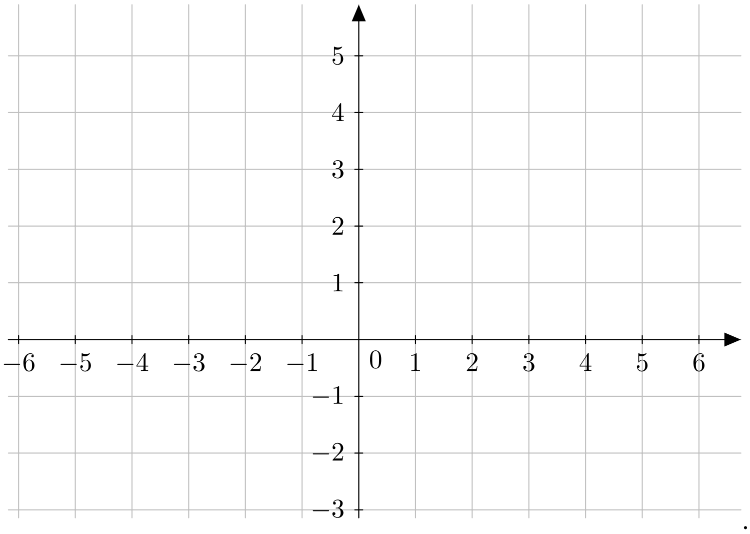


Figura 4.1: Pla cartesià

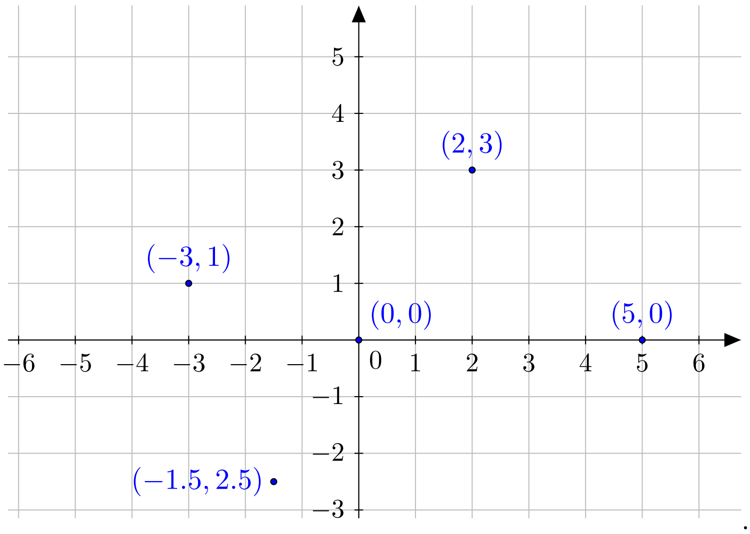


Figura 4.2: Diversos punts al pla cartesià

Notació 2 (notació dels punts). Els punts es poden escriure de dues maneres diferents: $A = (0, 1)$ o bé $A(0, 1)$.

4.1.1 Punt mitjà

Donats dos punts del pla, $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$, que determinen un segment, podem preguntar-nos quines són les cooordenades del punt mitjà d'aquest segment. Aquest punt queda determinant per la següent expressió:

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Exemple 41. Calculeu les coordenades del punt mitjà del segment determinant pels punts $P\,(0, -5)$ i $Q\,(-3, 1)$.

$$P_M = \left(\frac{0 + (-3)}{2}, \frac{-5 + 1}{2} \right) = \left(\frac{-3}{2}, -2 \right)$$

Exercici 61. Calculeu les coordenades del punt mitjà del segment determinant pels punts $P\,(-3, 7)$ i $Q\,(-5, 3)$.

Exercici 62. Donat el punt $P\,(0, -5)$, calculeu les coordenades del punt simètric de P respecte del punt $M\,(-1, 12)$.

Hem de notar que, encara que pareixi que sí, aquest resultat no es pot estendre quan es vol trobar un punt que estigui a distància $1/3$ d'A en el segment $\overline{AB}$ (en general, a distància $d \neq 1/2$). En aquest cas, s'haurà de procedir a raonar amb vectors (Secció 4.2), per exemple trobant el vector $1/3 \cdot \overrightarrow{AB}$ i situant-lo amb origen A. El seu extrem final seria el punt desitjat.

4.2 Vectors

Definició 32 (vector fix). Un *vector fix* és una segment orientat a l'espai (és a dir una fletxa), que té un *origen* (el punt on comença) i un *final* (punt on acaba). Els dos punts s'anomenen *extrems del vector*.

Per tant, un vector té:

- Una direcció: la recta sobre la qual està el vector
- Un sentit: cap a on apunta la fletxa. Si A i B són els extrems d'un vector, aleshores aquest vector pot tenir dos sentits: de A cap a B (punt origen és A i el punt destí és B) o de B cap a A (punt origen és B i el punt destí és A)
- La seva longitud. Formalment s'anomena *mòdul* del vector

Notació 3 (notació de vectors). Els vectors es denoten amb una fletxa a damunt del seu nom. D'aquesta manera escriurem $\overrightarrow{AB}$ per denotar el vector que té origen A i final a B. Si volem obviar els extrems, podem escriure $\overrightarrow{u}$, per exemple.

Exemple 42. Siguin els vectors següents (Figura 4.3):

- Els extems dels vectors són:
  - El vector $\overrightarrow{a}$ té origen $(-1, 1)$ i fi $(-3, -1)$
  - El vector $\overrightarrow{b}$ té origen $(-1, -1)$ i fi $(0, 0)$

- El vector $\overrightarrow{c}$ té origen $(-4, 3)$ i fi $(-1, 3)$
- El vector $\overrightarrow{d}$ té origen $(-4, 2)$ i fi $(-4, -1)$
- El vector $\overrightarrow{u}$ té origen $(1, 1)$ i fi $(3, 3)$
- El vector $\overrightarrow{v}$ té origen $(4, 1)$ i fi $(6, 3)$
- El vector $\overrightarrow{w}$ té origen $(1, -1)$ i fi $(3, 1)$

mòdul

- Els vectors $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ tenen la mateixa direcció
- Els vectors $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tenen el mateix sentit, però el vector $\overrightarrow{a}$ té sentit contrari
- Els vectors $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tenen el mateix mòdul. El mòdul de $\overrightarrow{b}$ és la meitat que el mòdul de $\overrightarrow{u}$. I $\overrightarrow{c}$ i $\overrightarrow{d}$ tenen el mateix mòdul (encara que no tenguin ni la mateixa direcció ni sentit)

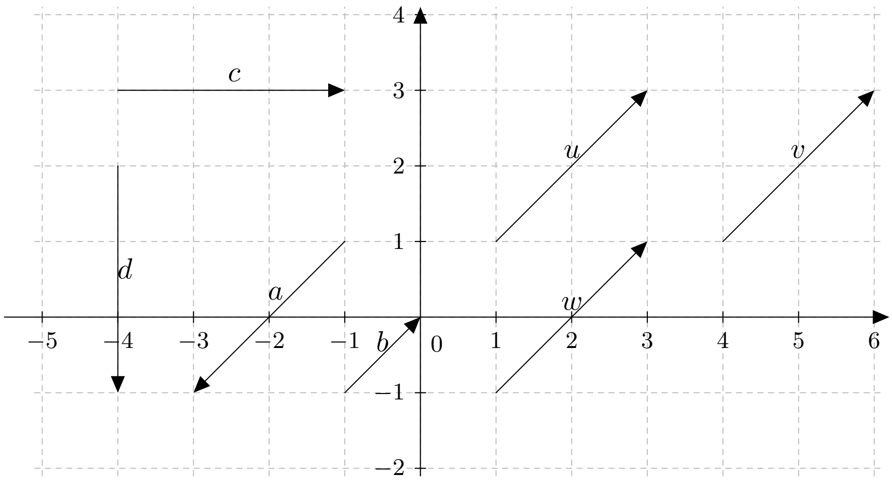


Figura 4.3: Diversos vectors al pla

Definició 33 (vector lliure). Un *vector lliure* és un segment orientat al pla, però del qual tenim la llibertat de triar el seu origen. És a dir, vector que tenen la mateixa direcció, sentit i longitud són a partir d'ara iguals per a nosaltres, independentment d'on estiguin situats. Formalment aquests vectors s'anomenen *equipolents*

En general, si no se'ns diu el contrari, o no se'ns dóna l'origen d'un vector, es suposarà que aquest és lliure. A més sempre suposarem que l'origen del vector és l'origen de coordenades i, per tant, escriurem el vector com a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(3, 5)}$ i no $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0, 0)(3, 5)}$, obviant el seu origen.

A més, de la mateixa manera que pels punts, existeixen dues notacions estàndard: $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{(3,5)}$ o bé $\overrightarrow{A}\overrightarrow{(3,5)}$, que podrem usar indistintament.

Exemple 43. Els vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ són equipolents (Figura 4.3). És més, tots aquests vectors es consideren el mateix vector que $\overrightarrow{(2,2)}$.

Definició 34 (coordenades i components d'un vector). Donat un vector $\overrightarrow{v}$, les seves *coordenades* són els nombres que formen el seu producte cartesià, és a dir, si $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$, aleshores, v_x i v_y són les seves coordenades. v_x es diu *coordenada de l'eix de les abscises* i v_y, *coordenada de l'eix de les ordenades*, o simplement coordenada de l'eix X i coordenada de l'eix Y, respectivament.

Les coordenades es poden interpretar com a les longituds, amb signe, de les projeccions d'un vector sobre els dos eixos de coordenades. Cadascuna de les dues components d'un vector pot ser positiva o negativa segons que la respectiva projecció apunti cap a la part positiva o negativa del corresponent eix de coordenades (figura Figura 4.4). En aquest sentit les coordenades s'anomenen *components*.

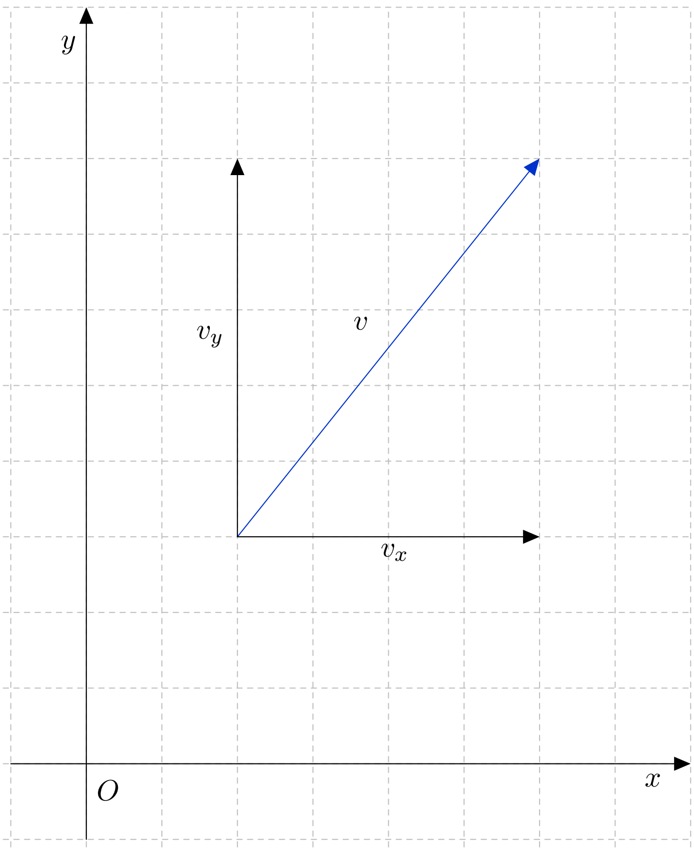


Figura 4.4: Components d'un vector

Exemple 44. Són vectors els següents:

$$\overrightarrow{B}(3,-2),\ \overrightarrow{C}(-5,1)$$

El vector $\overrightarrow{B}$ apunta cap a la dreta i cap a baix, i el vector $\overrightarrow{C}$ apunta cap a l'esquerra i cap a dalt. Com que no se'ns diu quins són els seus origens, es considerarà que aquests vectors són lliures, i que, per tant, podem situar-los els on es desitgi.

Exercici 63. Representeu gràficament els vectors $\overrightarrow{A}(-3,4)$, $\overrightarrow{B}(5,-1)$ i $\overrightarrow{C}(1,0)$.

Observació 5 (vector d'extrems donats). Si un vector té origen en el punt $P(x_1,y_1)$ i final en el punt $Q(x_2,y_2)$, aleshores les components d'aquest vector es calculen amb l'expressió següent:

$$\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1),$$

és a dir, restem les coordenades del punt final menys les coordenades del punt inicial.

Exemple 45. Calculeu les components del vector que comença en el punt $P\,(0,-6)$ i acaba en el punt $Q\,(-3,2)$:

$$\overrightarrow{PQ}=(-3-0,2-(-6))=(-3,8)$$

Exercici 64. Calculeu les components del vector d'origen $P\,(-2,1)$ i que acaba en el punt $Q\,(-3,-5)$.

Exercici 65. Els punts $A(3,0)$, $B(-5,4)$ i $C(6,-4)$ són vèrtexos d'un paral · lelogram. Representeu gràficament aquests punts i calculeu les cooordenades de vèrtex restant.

Definició 35 (mòdul d'un vector). El *mòdul* d'un vector és la seva longitud. El mòdul del vector $\overrightarrow{A}(a,b)$, que es representa per $\left|\overrightarrow{A}\right|$, es calcula amb la fórmula:

$$\left|\overrightarrow{A}\right|=|(a,b)|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Exemple 46. El mòdul del vector $\overrightarrow{A}(3,-2)$ és:

$$\left|\overrightarrow{A}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}.$$

Exercici 66. Calculeu el valor del mòdul del vector $\overrightarrow{A}(-5,1)$.

Acabem amb unes quantes definicions:

Definició 36 (vector unitari). Un vector és *unitari* quan té mòdul 1.

Definició 37 (ortogonalitat, ortonormalitat). Donats dos vectors $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, direm que $\overrightarrow{u}$ és *ortogonal* a $\overrightarrow{v}$ simplement quan $\overrightarrow{u}$ sigui perpendicular a $\overrightarrow{v}$, és a dir, quan ambdós formen un angle de 90 graus.

Si a més, $\overrightarrow{u}$ és unitari, aleshores direm que $\overrightarrow{u}$ és *ortonormal* a $\overrightarrow{v}$.

4.2.1 Operacions amb vectors

Definim aquí les diferents operacions que es poden fer amb vectors.

4.2.1.1 Suma de dos vectors

Definició 38 (suma de dos vectors). . Siguin $\overrightarrow{A}(a,b)$ i $\overrightarrow{A'}(a',b')$ dos vectors. La seva *suma* es defineix com:

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{A'}=(a,b)+(a',b')=\left(a+a',b+b'\right)$$

Exemple 47. Donats els vectors $\overrightarrow{A}(3,-2)$ i $\overrightarrow{B}(-5,1)$, la seva suma és:

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(3,-2)+(-5,1)=(3-5,-2+1)=(-2,-1)$$

Noteu que, per a què es puguin sumar dos vectors aquests han de tenir el mateix origen o bé ser lliures. En aquest cas, la suma de dos vectors es pot calcular gràficament: en el dibuix següent es representa la suma gràfica de $\overrightarrow{A}$ i $\overrightarrow{B}$ (Figura 4.5):

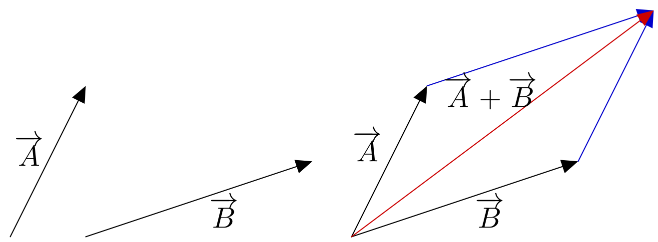


Figura 4.5: Regla del paral · lelogram

Es pot procedir de manera anàloga per a qualssevol vectors. Aquesta manera gràfica d'aconseguir la suma es coneix com *regla del paral · lelogram*.

Exercici 67. Calculeu gràficament i analítica la suma dels vectors $\overrightarrow{A}(-5,4)$ i $\overrightarrow{B}(3,-1)$.

4.2.1.2 Diferència de dos vectors

Definició 39 (diferència de dos vectors). Donats dos vectors $\overrightarrow{A}(a,b)$ i $\overrightarrow{A'}(a',b')$, la seva *diferència* es defineix com:

$$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{A'}=(a,b)-(a',b')=\left(a-a',b-b'\right)$$

Exemple 48. Donats els vectors $\overrightarrow{A}(3,-2)$ i $\overrightarrow{B}(-5,1)$, la seva diferència és:

$$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=(3,-2)-(-5,1)=(3+5,-2-1)=(8,-3)$$

Exercici 68. Calculeu $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$ i $\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}$, amb $\overrightarrow{A}(-5,4)$ i $\overrightarrow{B}(3,-1)$.

4.2.1.3 Producte d'un escalar per un vector

Definició 40 (producte d'un escalar per un vector). Donat un nombre $k \in \mathbb{R}$ i un vector $\overrightarrow{A}(a,b)$, *el producte de k per $\overrightarrow{A}$*, $k \cdot \overrightarrow{A}$, es defineix com:

$$k \cdot \overrightarrow{A} = k \cdot (a,b) = (ka, kb)$$

Exemple 49. Donats el vector $\overrightarrow{A}(3,-2)$ i el número $k=-5$, es té que el seu producte és:

$$k \cdot \overrightarrow{A} = -5 \cdot (3,-2) = (-5 \cdot 3, -5 \cdot (-2)) = (-15, 10)$$

En el dibuix següent es veu un exemple gràfic del producte d'un nombre (en aquest cas el 3) per un vector (Figura 4.6):

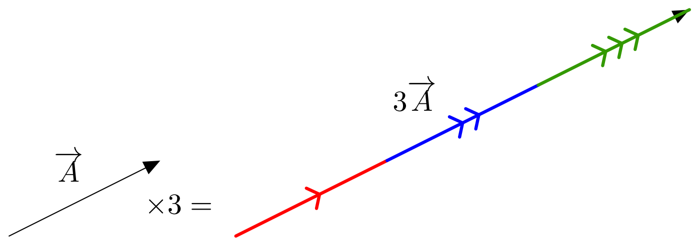


Figura 4.6: Exemple d'un producte d'un escalar per un vector

Exercici 69. Calculeu gràficament i analítica el producte $-3 \cdot \overrightarrow{B}$, amb $\overrightarrow{B}(3,-1)$.

Observació 6. Aquesta operació ens dóna sempre un vector paral · lel al vector inicial, és a dir, els vectors de components (a,b) i (ka,kb) són paral · lels, ja que si dividim les components respectives d'aquests dos vectors s'obté sempre el mateix nombre:

$$\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b} = k.$$

Proposició 6 (Condició de parel · lelisme entre dos vectors). *En relació a això, podem establir el resultat següent:*

$$\overrightarrow{A}(a,b) \text{ és paral} \cdot \text{lel a } \overrightarrow{A'}(a',b') \iff \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

Expressat en paraules, això ens diu que si dos vectors són paral · lels, aleshores el quocient entre les seves respectives components dóna el mateix resultat, i viceversa, és a dir, que si el quocient entre les respectives components de dos vectors dóna el mateix resultat, aleshores aquests dos vectors són paral · lels.

Exemple 50. Determineu, a cadascun dels apartats següents, si els vectors són paral · lels entre si:

a) $\overrightarrow{A}(2,-3)$ i $\overrightarrow{B}(4,-6)$:

$$\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}$$

Per tant, aquests dos vectors són paral · lels entre si.

b) $\overrightarrow{C}(2,-1)$ i $\overrightarrow{D}(4,-3)$:

$$\frac{2}{4}\neq\frac{-1}{-3}$$

Així, aquests dos vectors no són paral · lels entre si.

Exercici 70. Determineu si els vectors següents són paral · lels entre si:

a) $\overrightarrow{A}(1,-3)$ i $\overrightarrow{B}(5,-6)$

b) $\overrightarrow{C}(3,-1)$ i $\overrightarrow{D}(-6,2)$

c) $\overrightarrow{E}(3,0)$ i $\overrightarrow{F}(5,0)$

Producte escalar de dos vectors

Definició 41 (producte escalar de dos vectors). El *producte escalar de dos vectors*, $\overrightarrow{A}(a,b)$ i $\overrightarrow{B}(c,d)$, que es denota per $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$, en una base ortonormal, es defineix de la manera següent:

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=(a,b)\cdot(c,d)=a\cdot c+b\cdot d \tag{4.1}$$

Com es veu, el producte escalar de dos vectors és un nombre.

Exemple 51. El producte escalar dels vectors $\overrightarrow{A}(2,0)$ i $\overrightarrow{B}(-3,1)$ és igual a:

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=(2,0)\cdot(-3,1)=2\cdot(-3)+0\cdot 1=-6$$

Exercici 71. Calculeu $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$, amb $\overrightarrow{A}(-3,4)$ i $\overrightarrow{B}(-2,-8)$.

Angle entre dos vectors

Proposició 7 (Relació entre producte escalar i angle entre dos vectors). *Es pot provar que es cumpleix que la relació:*

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=\left|\overrightarrow{A}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B}\right|\cdot\cos\alpha, \tag{4.2}$$

on α és l'angle que formen entre si els vectors $\overrightarrow{A}$ i $\overrightarrow{B}$.

Això permet calcular l'angle α entre dos vectors, o qualsevol altre variables desconeguda d'aquesta fórmula (4.2) si es coneixen les altres. Recordeu que el producte escalar es pot calcular amb seva fórmula (4.1). Per tant, l'equació anterior és equivalent a:

$$ac+bd=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\cos\alpha \tag{4.3}$$

Observació 7. Recordeu que el cosinus d'un angle es defineix com la projecció del radi definit per l'angle sobre el diàmetre horitzontal de la circumferència de radi unitat.

Els valors del cosinus dels angles més usuals es mostren a continuació (taula Taula 4.1):

	0 rad	$\pi/6$ rad	$\pi/4$ rad	$\pi/3$ rad	$\pi/2$ rad	π rad	$3\pi/2$ rad
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0

Taula 4.1: Valors dels cosinus pels angles més usuals

Exemple 52. Què val l'angle format pels vectors $\overrightarrow{A}(2,0)$ i $\overrightarrow{B}(-3,1)$?

Si aplicam la darrera fórmula i denotam l'angle per α, es té que

$$\begin{aligned} 2\cdot(-3)+0\cdot 1 &= \sqrt{2^2+0^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2}\cdot\cos\alpha \\ -6 &= 2\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{-6}{2\sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \alpha &= \arccos\frac{-3}{\sqrt{10}} \simeq 161,565° \end{aligned}$$

Exercici 72. Calculeu l'angle que formen entre si els vectors $\overrightarrow{A}(-2,-5)$ i $\overrightarrow{B}(-3,2)$.

Vegem a continuació les propietats del producte escalar.

Teorema 8 (Propietats del producte escalar). *Donats vectors $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ i $\overrightarrow{C}$ i un nombre k qualssevol, el producte escalar té les propietats següents:*

a) $\left|\overrightarrow{A}\right| = \sqrt{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}}$. *És a dir, el mòdul d'un vector es pot calcular amb l'arrel quadrada del producte escalar per si mateix.*

b) $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}$ *(propietat conmutativa)*

c) $\left(k\overrightarrow{A}\right)\cdot\overrightarrow{B} = k\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)$ *(propietat associativa)*

d) $\overrightarrow{A}\cdot\left(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$ *(propietat distributiva)*

e) Condició de perpendicularitat entre dos vectors*: si el producte escalar de dos vectors és 0, aleshores aquests dos vectors són perpendiculars entre si, i viceversa, és a dir, que si dos vectors són perpendiculars entre si, aleshores el seu producte escalar és 0. Matemàticament,*

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = 0 \iff \overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$$

Exemple 53. Per exemple, els vectors $\overrightarrow{A}(30, -9)$ i $\overrightarrow{B}(3, 10)$ són perpendiculars, ja que $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 30 \cdot 3 + (-9) \cdot 10 = 0$.

Exercici 73. En cada cas, calculeu x per a què els vectors $\overrightarrow{A}(8, -15)$ i $\overrightarrow{B}(2, x)$ siguin:

a) paral · lels,

b) perpendiculars,

c) formin un angle de 60°.

Exercici 74. Donat el vector $\overrightarrow{A}(5, 12)$, trobeu:

a) un vector paral · lel,

b) un vector perpendicular.

4.3 La recta en el pla

En aquest apartat farem un estudi de la recta en un espai de dues dimensions.

Una recta, en particular, és una col · lecció de punts. Per tant, un objectiu principal serà trobar les coordenades de tots els seus punts. La manera més senzilla de trobar-la és usar vectors.

Donada una recta r, sempre podem obtenir un punt qualsevol P i un vector v sobre aquesta — per exemple, si sabéssim dos punts A i B sobre la recta, aleshores tendríem un punt, A o B, i un vector amb aquestes condicions, $A - B$ o qualsevol múltiple seu. Per tant, qer a qualsevol punt X sobre la recta, aquest forma el vector $\overrightarrow{OX}$, que té com a origen l'origen de coordenades i com a destí X. Aquest vector es pot posar com a suma del vector OP i un múltiple del vector v (figura Figura 4.7), és a dir, existeix un nombre λ tal que:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}. \tag{4.4}$$

Aquest equació (4.4) s'anomena *equació vectorial de la recta* i al vector v se li diu *vector director* de r.

Observació 8. Noteu que realment no fa falta que el vector director v estigui sobre la recta. Basta qualsevol que tengui la mateixa direcció, ja que suposem que feim feina amb vectors lliures. En aquest sentit parlarem de *el* vector director de la recta r i no d'*un* vector director, per a qualsevol d'aquests vectors, ja que els haurem identificat.

Exemple 54. Trobeu l'equació vectorial de la recta que passa pels punts $A(2, 3)$ i $B(4, 5)$.

Hem de prendre un punt de la recta i un vector director. Ja tenim el punt: podem prendre A o B. Agafarem $A(2, 3)$.

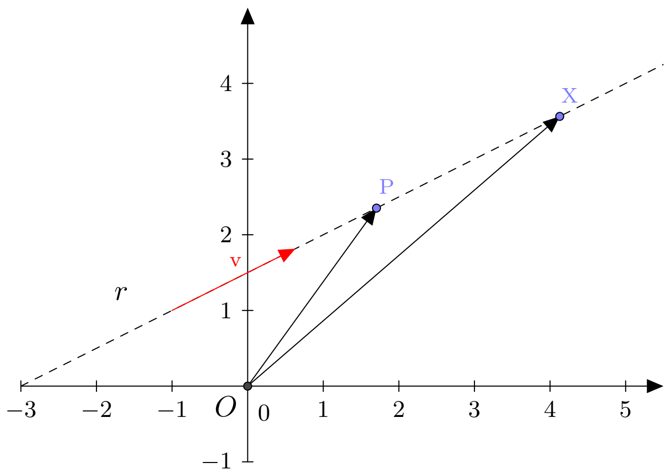


Figura 4.7: Visualització de l'equació vectorial d'una recta

Per trobar el vector director, calcularem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(4-2, 5-3)} = \overrightarrow{(2, 2)}$.
Per tant, l'equació vectorial de la recta en qüestió és:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{(2, 2)}$$

Si denotam $X = (x, y)$ les coordenades del punt X, tenim que aquesta equació es transforma en:

$$\overrightarrow{(x, y)} = \overrightarrow{(2, 3)} + \lambda\overrightarrow{(2, 2)}.$$

Observació 9. A part d'aquesta equació, n'hi ha d'altres però totes provénen d'aquesta. L'ús d'una o de l'altra dependrà de l'exercici concret que volguem resoldre i de la nostra comoditat.

4.3.1 Equació paramètrica de la recta

Sigui r una recta donada pel punt $P(x_1, y_1)$ i el vector director $\overrightarrow{v_r}(v_x, v_y)$, aleshores l'equació vectorial de la recta r ve donada per

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v},$$

on $X(x, y)$ és un punt qualsevol de la recta. Si desenvolupem aquesta equació obtenim que

$$\overrightarrow{(x, y)} = \overrightarrow{(x_1, y_1)} + \lambda \cdot \overrightarrow{(v_x, v_y)},$$

és a dir,

$$\overrightarrow{(x, y)} = \overrightarrow{(x_1 + \lambda \cdot v_x, y_1 + \lambda v_y)}.$$

Dos vectors són iguals si, i només si, les seves components són iguals. Per tant, $(x, y) = (x_1 + \lambda \cdot v_x, y_1 + \lambda v_y)$, és a dir, s'han de complir simultàniament les equacions següents:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot v_x, \\ y = y_1 + \lambda \cdot v_y. \end{cases}$$

Hem obtingut l'*equació paramètrica*. L'equació paramètrica d'una recta dóna les coordenades de tots els punts d'una recta depenent d'un paràmetre λ (d'aquí el seu nom). Per a cada valor de λ obtenim un punt de la recta.

Recapitulant, si r és una recta que passa pel punt $P(x_1, y_1)$ i té com a vector director $\overrightarrow{v_r}(v_x, v_y)$, aleshores l'equació paramètrica de r ve donada per:

$$r : \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_x \\ y = y_1 + \lambda v_y \end{cases}, \tag{4.5}$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 55. Si una recta passa pel punt $(0, -1)$ i el seu vector director és $\overrightarrow{v}(-3, 2)$, aleshores la seva equació paramètrica és la següent:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + \lambda\,(-3) \\ y = -1 + \lambda \cdot 2 \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

Per trobar més punts d'aquesta recta basta substituir λ per un nombre qualsevol a les expressions anteriors.

Exemple 56. Si a la recta anterior feim $\lambda = 2$, tenim que

$$\left.\begin{array}{l} x = -6 \\ y = -1 + 4 = 3 \end{array}\right\},$$

i, per tant, que $(-6, 3)$ és un altre punt de la recta.

Exercici 75. Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per $A(-3, 0)$ i segueix la direcció $\overrightarrow{v}(5, -1)$. Trobeu tres punts més d'aquesta recta.

Observació 10. Per saber si un punt pertany a una recta donada, només hem de veure si aquest punt verifica les equacions de la recta. Per exemple, si volem saber si $P = (5, 3)$ pertany o no a la recta de l'exemple 55, només hem de substituir a les equacions:

$$\begin{cases} 5 = -3\lambda \\ 3 = -1 + 2\lambda \end{cases},$$

i hem de resoldre aquest sistema. Si aquest sistema té solució, és a dir, existeix λ, aleshores P pertanyarà a la recta; sinó, no ho farà. En el nostre cas, $\lambda = -5/3$ de la primera equació i $\lambda = 2$ de la segona. Per tant, P no és de la recta.

Aquest fet també ens servirà per a les altres equacions de la recta.

4.3.2 Equació contínua de la recta

Si aïllem λ a cadascuna de les equacions de la recta en forma paramètrica (4.5), obtenim

$$\lambda = \frac{x - x_1}{v_x}, \ \lambda = \frac{y - y_1}{v_y}.$$

Si ara igualam les dues equacions, s'obté *l'equació contínua de la recta*

$$r : \frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}, \tag{4.6}$$

on $P(x_1, y_1)$ és qualsevol punt de la recta i $\overrightarrow{v_r}(v_x, v_u)$ és el vector director de la recta.

Exemple 57. Seguint amb la recta de l'exemple anterior, exemple 55, la seva equació contínua és:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{2}$$

Observació 11. Notem que si alguna component del vector director $\overrightarrow{v_r}$ és zero, aleshores no existeix la fracció corresponent a l'equació (4.6) (no es pot dividir per zero). Ara bé, en aquest cas es veu l'equació (4.6) com a *notació*.

Per exemple, la recta que passa pel punt $(2, 3)$ i té com a vector director $\overrightarrow{(5, 0)}$, té com a equació contínua:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{0}$$

4.3.3 Equació general de la recta

Si a les equacions de la recta en forma contínua llevam els denominadors i ho transposam tot al primer membre, l'equació de la recta s'escriu de la manera següent:

$$Ax + By + C = 0, \tag{4.7}$$

amb A, B i C nombres reals. Aquesta equació rep el nom d'*equació general de la recta* o *equació implícita de la recta*.

Exemple 58. Seguint amb la recta anterior, exemple 55, la seva equació general és:

$$r \equiv 2x = -3\,(y+1)\,,$$

que simplificada és:

$$r \equiv 2x + 3y + 3 = 0.$$

Observació 12. Notem que, si a l'exemple anterior, feim $x = \lambda$, llavors

$$y = (-3 - 2x)\,/3 = -1 + 2/3\lambda,$$

per la qual cosa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \cdot \lambda.$$

Això implica que r passa pel punt $(0, -1)$ i té com a vector director $\overrightarrow{(1, -2/3)}$. Noteu que aquest darrer vector director és equivalent a $(-3, 2)$ (aquest darrer és el primer multiplicat per 3), el qual és el que teníem a l'exemple exemple 55.

Exercici 76. Trobeu les equacions contínua i general de la recta que passa per $P(2, -5)$ i segueix la direcció del vector director $\overrightarrow{v}\,(-2, 7)$.

Exercici 77. Donada la recta d'equació $5x-y+6 = 0$, trobeu les cooordenades de dos dels seus punts. A partir d'aquests, calculeu el seu vector director.

4.3.3.1 Vector director a partir de l'equació general

Proposició 9. *Donada una recta en forma general, és a dir, $Ax+By+C = 0$, el seu vector director és $\overrightarrow{v} = (-B, A)$.*

Demostració. Una recta genèrica r que passa pel punt $P(x_1, y_1)$ i que té com a vector director $\overrightarrow{v_r}(v_x, v_y)$ té l'equació contínua

$$r \equiv \frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

Per tant, $v_y \cdot (x-x_1) = v_x \cdot (y-y_1)$. Aleshores, $v_y x - v_x y + (-v_y x1 + v_x y_1) = 0$. Per la qual cosa, $A = v_y$, $B = -v_x$ i $C = -v_y x_1 + v_x y_1$. Per tant, el vector director és $(v_x, v_y) = (-B, A)$. ■

Proposició 10. *Donada una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ en forma implícita, tenim que el vector (A, B) és perpendicular a la recta.*

Demostració. El vector (A, B) és perpendicular al vector $(-B, A)$ — ja que el seu producte escalar és 0. Per tant, el vector (A, B) és un vector perpendicular a la recta d'equació $Ax + By + D = 0$. ■

Exemple 59. El vector director de la recta $5x - 2y + 1 = 0$ és $\overrightarrow{v} = (2, 5)$.

Exercici 78. Calculeu el vector director de les rectes següents:

a) $4x - 3y + 1 = 0$

b) $-y + 5 = 0$

Exercici 79. Donada la recta $x - 5y + 8 = 0$, trobeu:

a) l'equació de la recta paral · lela que passa pel punt $(2, -7)$,

b) l'equació de la recta perpendicular que passa pel punt $(2, -7)$.

Observació 13. La proposició 9, serveix per a passar de l'equació general a l'equació contínua o bé a l'equació paramètrica: directament es pot obtenir el seu vector director v_r. I després subtituïnt x o y, podem trobar un punt seu.

Exemple 60. Obteniu l'equació contínua de la recta s que té equació general $s \equiv 5x - 9y - 2 = 0$.

Per la proposició 9, tenim que el vector director de s és $v_s = (9, 5)$.

D'altra banda, trobarem un punt de s. Prendre'm $x = 0$, per exemple, amb el que obtenim $y = -2/9$. Per tant $(0, -2/9) \in s$.

Amb tot, tenim que l'equació contínua de s serà:

$$s \equiv \frac{x}{9} = \frac{y + \frac{2}{9}}{5}$$

Exercici 80. Donada la recta $r \equiv 2x - 9y + 5 = 0$, trobeu les equacions contínua, paramètrica i vectorial.

Exemple 61. Trobeu el punt de tall de les rectes $r \equiv 2x - 5y + 10 = 0$ i $s \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{8}$.

Diem $P(a, b)$ al punt de tall de r i s. Si $P \in r \cap s$, aleshores P verifica les equacions de r i s simultàniament. Per tant, s'ha de verificar el sistema:

$$\begin{cases} 2a - 5b + 10 = 0 \\ \dfrac{a-2}{5} = \dfrac{b-3}{8} \end{cases}$$

Aplicant el mètode de reducció (multiplicant la segona equació per 40), tenim que

$$\begin{cases} 2a - 5b = -10 \\ 8a - 5b = 1 \end{cases}$$

Per tant, $a = 3/2$ i $b = 13/5$. Llavors el punt de tall és $P(\frac{3}{2}, \frac{13}{5})$.

Noteu que no sempre dues rectes tendran punt de tall: quan aquestes siguin paral·leles, aleshores no existiran punts de tall. En aquest cas, el sistema no tendria solució. Vegeu l'apartat referent a la posició relativa de dues rectes (Subsecció 4.3.6).

Exercici 81. Donades les rectes $r \equiv 5x - 2y + 8 = 0$ i $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{5}$, trobeu:

a) dues rectes paral·leles a r

b) dues rectes paral·leles a s

c) una recta perpendicular a s que passi per $(10, 10)$

d) una recta perpendicular a r que passi per $(0, 0)$

e) el punt de tall de r i s

f) el punt de tall de r i la recta perpendicular a s que passa per $(5, 20)$

4.3.4 Equació explícita de la recta

Si de l'equació general d'una recta (4.7) aillam la y ens queda una equació de la forma:

$$y = mx + b, \tag{4.8}$$

amb m i b nombres reals. Aquesta equació es coneix amb el nom de *equació explícita de la recta*. S'anomena *pendent* al coeficient m i *ordenada a l'origen* al nombre b. La interpretació gràfica d'aquests dos paràmetres és la següent:

- La pendent de la recta és la inclinació d'aquesta:
  - Si $m > 0$, aleshores la recta és *creixent* (quan els valors de x creixen, els valors de y creixen)
  - Si $m < 0$, aleshores la recta és *decreixent* (quan les valors de x creixen, els valors de y decreixen)
  - Si $m = 0$, aleshores la recta és *constant*. Té una forma completament horitzontal.

  D'altra banda, quan $|m|$ és major, la inclinació de la recta és major en el sentit que és més vertical. Per exemple, $y = 3x + 2$ tendrà més inclinació que $y = x + 2$, i $y = -5x + 10$ tendrà més inclinació que $y = -2x + 10$.

- L'ordenada a l'origen b és el valor que de l'eix de les Y quan $x = 0$. És a dir, l'ordenada a l'origen ens diu en quin punt talla la recta a l'eix OY. En altres paraules, $(0, b)$ és el punt de tall de la recta amb l'eix OY.

Exemple 62. Representeu gràficament la recta $r \equiv y = -2x + 3$ i trobeu els seus punts de tall amb els eixos.

Sabem que r és decreixent perquè $-2 < 0$. I que passa per $(0, 3)$. Per representar-la només ens fa falta un altre punt (una recta ve determinada per dos punts). Substituïm, per exemple, per $x = 2$: $y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$. Per tant, $(2, -1) \in r$. Aleshores, r té la representació següent (Figura 4.8):

Només fa falta trobar el punt de tall amb l'eix de les abscises. En aquest cas, $y = 0$. Per tant, $0 = -2x + 3$, el que implica que $x = 3/2$. Per tant, el punt $(\frac{3}{2}, 0)$ és el punt de la recta que està sobre l'eix OX.

4.3.4.1 Càlcul de la pendent mitjançant dos punts

Donats dos punts $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, per calcular la pendent de la recta $r\colon y = mx + b$ que els conté, podem substituir ambdós punts a l'equació de la recta i trobar m i b. O bé, podem emprar la fórmula següent per a calcular la pendent de r:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

i després substituir un dels punts a l'equació de la recta per a trobar b.

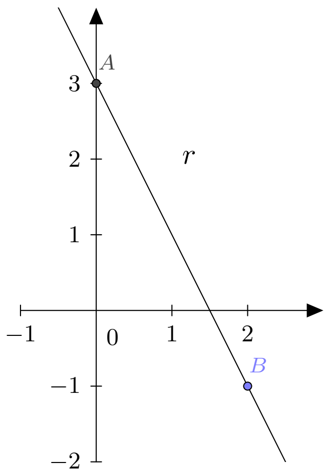


Figura 4.8: Visualització de l'equació explícita d'una recta

Exemple 63. Trobeu l'equació explícita de la recta r que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(10,15)$.

Sigui $r\colon y = mx + n$ l'equació explícita de la recta r. Hem de determinar m i n. Facem-ho de dues maneres:

- Substituïnt els dos punts a l'equació explícita.

  Com que A i B són punts de la recta r, verifiquen la seva equació. Per tant,
$$\begin{cases} 3 = m \cdot 2 + n \\ 15 = m \cdot 10 + n \end{cases}$$
  Si resolem aquest sistema per m i n, obtenim $m = 3/2$ i $n = 0$.

- Emprant la fórmula de la pendent

  Podem calcular la pendent amb la fórmula:
$$m = \frac{15-3}{10-2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$
  Per tant, $r\colon y = \frac{3}{2}x + n$. Prenem un punt qualsevol de la recta, per exemple A, i substituïm-lo a aquesta equació: $3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + n$. D'aquí tenim que $n = 0$.

4.3.4.2 Pendents de rectes paral · leles i perpendiculars

Existeix una relació entre les pendents de rectes paral · leles o perpendiculars:

Proposició 11 (relació entre les pendents de rectes paral · leles o perpendiculars). *Siguin $r\colon y = m_r x + n_r$ i $s\colon y = m_s x + n_s$ dues rectes en el pla. Aleshores:*

- $r \parallel s \iff r, s$ *tenen la mateix pendent* $\iff m_r = m_s$
- $r \perp s \iff m_r = -\frac{1}{m_s}$

Aquest teorema no es podrà generalitzar a la geometria a l'espai.

Exemple 64. Si el pendent d'una recta donada val -5, la pendent de qualsevol recta paral · lela val també -5, i la de qualsevol recta perpendicular val $1/5$.

Exercici 82. Donada la recta $x + 5y - 3 = 0$, calculeu la seva pendent, la de una recta paral · lela i la de una recta perpendicular.

4.3.5 Equació de la recta determinada per dos punts

Proposició 12 (equació de la recta determinada per dos punts donats). *Donats dos punts coneguts $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, si volem conèixer la recta que determinen, podem emprar la fórmula següent:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

que ens dóna l'equació contínua de la recta.

Amb aquesta proposició, ens evitam haver de cercar el vector director i plantejar una equació.

Exemple 65. L'equació de la recta que passa pels punts $A\,(0, -2)$ i $B\,(-4, 1)$ es la següent:

$$\frac{x}{-4} = \frac{y + 2}{3}$$

Exercici 83. Calculeu l'equació de la recta que passa pels punts $A\,(3, -5)$ i $B\,(-1, 7)$.

4.3.6 Posició relativa entre dues rectes

Proposició 13 (posició relativa entre dues rectes). *Dues rectes al pla cartesià poden ser (vegi's Figura 4.9):*

- secants, *és a dir, que es tallen a un punt*
- paral · leles. *Per tant, no es tallen a cap punt.*
- coincidents, *és a dir, són la mateixa recta.*

Cadascuna d'aquestes posicions s'anomenen la posició relativa *entre les dues rectes.*

La proposició següent ens diu quan dues rectes són secants, paral · leles o coincidents.

Proposició 14 (criteri de posició relativa). *Per a dues rectes r i s en el pla es compleix:*

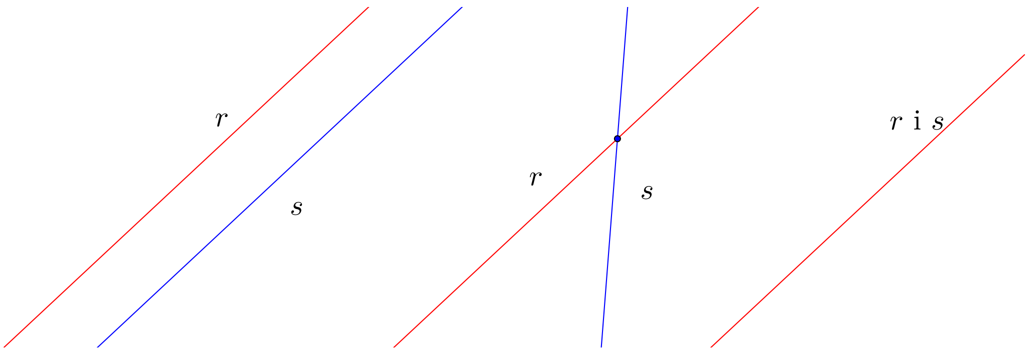


Figura 4.9: Les diferents posicions relatives possibles entre dues rectes

- *Si r i s tenen diferent pendent, aleshores són secants*
- *Si r i s tenen la mateixa pendent, aleshores són paral · leles o coincidents. En aquest cas:*
  - *Si r i m tenen diferents ordenades a l'origen, llavors són paral · leles*
  - *Si r i m tenen la mateixa ordenada a l'origen, llavors són coincidents*

Aquest criteri usant vectors directors és el següent:

Proposició 15 (criteri de posició relativa). *Per a dues rectes r i s en el pla es compleix:*

- *Si r i s tenen diferent vector director, aleshores són secants*
- *Si r i s tenen el mateix vector director, aleshores són paral · leles o coincidents. En aquest cas, si r i m passen per un punt en comú, aleshores són coincidents. Altrament, són paral · leles*

4.3.6.1 Càlcul dels punts de tall

Fins ara hem vist quina és la posició relativa entre dues rectes. Això vol dir que podem saber si dues rectes es tallen però *encara* no sabem com trobar el seu punt de tall.

Per a trobar el punt de tall entre dues rectes, només hem de notar que si P pertany a les dues rectes, aleshores ha de complir ambdues equacions. D'aquesya manera obtindrem un sistema d'equacions de dues incògnites i dues equacions, que podem resoldre fàcilment per reducció, igualació o substitució.

Exemple 66. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes $r : x - 3y + 1 = 0$ i $s : -4x + 7y = 0$.

Hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ -4x + 7y = 0 \end{cases}$$

Si aplicam el mètode de substitució, aïllant la x de la primera equació: $x = 3y - 1$, tenim que $-4\,(3y - 1) + 7y = 0$, és a dir, $y = \frac{4}{5}$. Per tant, si substituïm a la primera equació: $x - 3 \cdot \frac{4}{5} + 1 = 0$, és a dir, $x = \frac{7}{5}$.

Aleshores, el punt de tall entre ambdues rectes és el punt $\left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Exercici 84. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes $r : 2x - 3y + 1 = 0$ i $s : -4x + 7y = 0$.

Exercici 85. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes $r : 2x - 3y + 1 = 0$ i $s : -4x + \alpha y = 0$ en funció del paràmetre α.

4.4 Exercicis proposats

Punts i vectors

Exercici 86. Els punts $A\,(3, -2)$, $B\,(5, 0)$ i $C\,(-1, -3)$ són vèrtexs d'un paral · lelogram. Calculeu la posició de l'altre vèrtex. I trobeu el seu perímetre.

Exercici 87. Donats els punts $A(3, 1)$, $B(-5, 1)$, $C(-4, -2)$, $D(0, -3)$, calculeu, analíticament, les components i el mòdul dels vectors:

a) $\overrightarrow{AB}$ *c*) $\overrightarrow{BC}$ *e*) $\overrightarrow{CD}$ *g*) $\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{BA}$ *d*) $\overrightarrow{CB}$ *f*) $\overrightarrow{AD}$ *h*) $\overrightarrow{CA}$

Exercici 88. Calculeu l'extrem del vector $\overrightarrow{AB} = (3, -4)$ si sabem que el seu origen es troba al punt $A(2, -5)$; trobeu l'origen del vector $\overrightarrow{CD} = (-5, 1)$ si sabem que el seu extrem final es troba al punt $D(-5, 2)$.

Exercici 89. Donats els punts $A(3, 0)$, $B(2, 3)$, $C(-2, 1)$ i $D(7, 2)$, esbrineu si els vectors següents són equipolents:

a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ *b*) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ *c*) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$

Exercici 90. Les coordenades del punt A són el doble de les del punt B. Sabent que $\overrightarrow{AB} = (-2, 5)$, calculeu les coordenades dels punts A i B.

Exercici 91. Donats els vectors $\overrightarrow{u} = (7, -4)$, $\overrightarrow{v} = (-5, -2)$ i $\overrightarrow{w} = (-6, 0)$, calculeu:

a) $5\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$ *c*) $-\overrightarrow{w} - 3(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

b) $3\overrightarrow{u} - \frac{2}{3}\overrightarrow{w}$ *d*) $-3\overrightarrow{v} + 5\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$

i calculeu-ne els seus mòduls.

Exercici 92. Trobeu quatre vectors paral · lels i tres perpendiculars al vector $\overrightarrow{u}(-5,4)$. En podeu trobar d'unitaris?

Exercici 93. Calculeu l'angle que formen els vectors següents i extreis conclusions sobre la seva direcció i sentit:

a) $\overrightarrow{u}(5,2)$ i $\overrightarrow{v}(10,4)$

b) $\overrightarrow{u}(-3,15)$ i $\overrightarrow{v}(2,-10)$

c) $\overrightarrow{u}(3,4)$ i $\overrightarrow{v}(-50,40)$

d) $\overrightarrow{u}(-3,4)$ i $\overrightarrow{v}(-2,10)$

Exercici 94. Donats els punts $A(2,3)$ i $B(-5,4)$, trobeu els punts que divideixen el segment AB en dues parts iguals, en tres parts iguals i en quatre parts iguals.

Rectes

Exemple 67. Trobeu la recta que passa pels punts $A(5,9)$ i $B(-10,8)$.

Ho farem de diverses maneres:

- Calculant el vector director i amb un punt:

  El vector director pot ser $\overrightarrow{v} = (-10-5, 8-9) = (-15,-1)$. Qualsevol múltiple seu també és vector diretor de la recta. Per tant, triarem $\overrightarrow{v}(15,1)$ per evitar els signes.

  D'aquí podem obtenir diverses equacions de la recta fàcilment:

  - L'equació vectorial: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{(5,9)} + \lambda \cdot \overrightarrow{(15,1)}$
  - L'equació paramètrica: $r\colon \begin{cases} x = 5 + 15\lambda \\ y = 9 + \lambda \end{cases}$
  - L'equació contínua: $r\colon \frac{x-5}{15} = y - 9$

- Trobant la pendent:

  Amb la fórmula, $m = \frac{8-9}{-10-5} = 1/15$. Per tant $r\colon y = 1/15x + n$. Substituïnt, per exemple, A a l'equació de la recta, tenim que $9 = 1/15 \cdot 5 + n$. Pel que $n = 26/3$. Per tant, $r\colon y = 1/15x + 26/3$.

- A partir de la contínua o a partir de la explícita, podem trobar l'equació general[1].

Exemple 68. Trobeu totes les equacions de la recta que passa pel punt $P\,(3,-2)$ i que té per vector director $\overrightarrow{v}\,(1,-4)$.

- L'equació paramètrica és: $r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - 4\lambda \end{cases}$

[1] No és recomanable fer-ho amb un sistema d'equacions substituïnt els punts.

- L'equació contínua és $r : x - 3 = \frac{y+2}{-4}$
- L'equació general és $-4 \cdot (x - 3) = y + 2$, és a dir, $-4x - y + 10 = 0$
- Si aïllam la y tenim: $y = -4x + 10$. Aleshores, la pendent d'aquesta recta és -4.

Exercici 95. Trobeu la recta determinada per:

a) Els punts $A(-2, -1)$ i $B(2, 4)$

b) El punt $P(1, -4)$ i el vector director $\overrightarrow{v}(5, -3)$

c) El punt $P(1, -2)$ i angle que forma amb l'eix OX és $\alpha = 135°$

d) El punt $P(1, -1)$ i la pendent $m = 2$

e) La pendent $m = 2$ i l'ordenada a l'origen -5

Exercici 96. Donada la recta r que passa pel punt $P(-5, -3)$ i que té vector director $\overrightarrow{v}(12, 8)$:

a) Trobeu les equacions vectorial i paramètrica de la recta

b) Trobeu tres punts que pertanyin a r

c) Esbrina si els punts $(-11, -7)$ i $(2, -1)$ pertanyen a la recta.

Exercici 97. Donada la recta s que passa pel punt $P(4, -3)$ i que té vector director $\overrightarrow{v}(2, -7)$:

a) Trobeu l'equació contínua de la recta

b) Trobeu tres punts que pertanyin a r

c) Esbrina si els punts $(8, -7)$ i $(0, 11)$ pertanyen a la recta.

Exercici 98. Donada la recta s que passa pel punt $P(-2, 3)$ i que té vector director $\overrightarrow{v}(-1, 4)$:

a) Trobeu l'equació general de la recta

b) Trobeu tres punts que pertanyin a r

c) Esbrina si els punts $(-5, 15)$ i $(4, 3)$ pertanyen a la recta.

Exercici 99. Troba l'equació general de la recta que passa pels punts $A(2, 3)$ i $B(-3, -2)$.

Exercici 100. Troba l'equació explícita de la recta que:

a) passa pel punt $A(-3, -1)$ i té pendent $m = -2$

b) passa pels punts $A(-4, -2)$ i $B(-3, -1)$

c) passa pel punt $A(-5, 2)$ i té ordenada a l'origen -4.

Exercici 101. Trobeu un punt i el vector director de cadascuna d'aquestes rectes:

a) $\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(-10,-4)} + k\overrightarrow{(-9,7)}$

b) $\frac{x-15}{-1} = \frac{y+2}{6}$

c) $2x - 5y + 3 = 0$

d) $y = -5x + 10$

e) $\begin{cases} x = 2 - 8k \\ y = 3 + 6k \end{cases}$

f) $x - 5 = \frac{y+4}{12}$

g) $x + 3y + 1 = 0$

h) $y = -\frac{3}{2}x - 2$

i) $\begin{cases} x = -7 - k \\ y = 11 + k \end{cases}$

j) $\frac{-x-5}{-1} = \frac{4y+4}{8}$

k) $-2x - y - 12 = 0$

l) $y = x + 4$

Exercici 102. Indiqueu si els punts següents estan alinets:

a) $A(-1,1)$, $B(2,1)$ i $C(8,5)$

b) $D(-1,2)$, $E(0,0)$ i $F(2,-2)$

En cas negatiu, obteniu-ne un que hi estigui.

Exercici 103. Esbrineu la posició relativa de les rectes següents:

a) $r\colon 6x - 15y + 1 = 0$ i $s\colon -10x + 25y + 1 = 0$

b) $r\colon 2x - 10y + 8 = 0$ i $s\colon x + 5y + 4 = 0$

c) $r\colon y = 2x + 3$ i $s\colon y = 2x + 1$

d) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s\colon \frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{-12}$

e) $r\colon 2x + 6y + 4 = 0$ i $s\colon -3x - 9y - 6 = 0$

f) $r\colon y = x + 1$ i $s\colon y = -x + 1$

g) $r\colon y = 3x + \frac{1}{2}$ i $s\colon 6x - 2y + 1 = 0$

h) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s\colon \begin{cases} x = -10 - k \\ y = 2 + k \end{cases}$

i) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s\colon 2x - y + 5 = 0$

Exercici 104. Trobeu el punt d'intersecció de les rectes secants de l'exercici anterior.

Exercici 105. Trobeu la recta paral · lela a la recta r que passa pel punt P en els casos següents:

a) $r\colon 4x - 5y + 3 = 0$, $P(-3,5)$

b) $r\colon \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3}$, $P(4,-10)$

c) $r\colon y = -5x + 3$, $P(-1,1)$

Exercici 106. Indiqueu si els parells de rectes següents són perpendiculars:

a) $r\colon x - 5y + 1 = 0$, $s\colon 10x + 2y - 3 = 0$

b) $r\colon y = 2x + 4$, $s\colon y = -\frac{1}{2}x + 8$

c) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$, $s\colon \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{-1}$

d) $r\colon x+y+4=0,\ s\colon -x-y-1=0$

e) $r\colon y=x+1,\ s\colon y=-x-2$

f) $r\colon \frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{7},\ s\colon 7x+3y+5=0$

Exercici 107. Trobeu l'equació de la recta perpendicular a la recta r que passa pel punt P:

a) $r\colon 4x-5y+3=0,\ P(-3,5)$

b) $r\colon \frac{x+5}{-2}=\frac{y+1}{-3},\ P(4,-10)$

c) $r\colon y=-5x+3,\ P(-1,1)$

d) $r\colon \begin{cases} x=3+5\lambda \\ y=-2-6\lambda \end{cases},\ P(1,1)$

Exercici 108. Calculeu el valor de a per a què les rectes $r\equiv 3x+ay+4=0$ i $s\equiv 4x-2y-1=0$ siguin

a) Paral · leles

b) Perpendiculars

c) Formin un angle de 45 graus

d) Formin un angle de 60 graus

Exercici 109. Calculeu l'angle que formen les rectes següents:

a) $r\colon x-y+1=0,\ s\colon 7x+2y-3=0$

b) $r\colon y=-3x+4,\ s\colon y=-x+1$

c) $r\colon 2x+y+4=0,\ s\colon -3x+2y-1=0$

d) $r\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{3},\ s\colon \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}$

Exercici 110. Donada la recta $r\colon 2x-3y+1=0$, calculeu:

a) el seu vector director i un vector perpendicular,

b) l'equació de la recta que passa pel punt $A\,(3,-5)$ i que és perpendicular a la recta r,

c) el punt simètric del punt A respecte de la recta r.

Exercici 111. Calculeu la pendent i l'ordenada a l'origen de les rectes següents:

a) $x+3y=4$

b) $4y+5=-x$

c) $2x-7y=0$

d) $-8y=8$

Exercici 112. Calculeu les equacions de la recta que passa pels punts $A\,(-1,0)$ i $B\,(-4,-1)$. Calculeu el seu vector director i altres dos punts més de la recta.

Exercici 113. Calculeu totes les equacions de la recta que passa pel punt $A\,(3,-5)$ i que segueix la direcció $\vec{v}(-1,7)$. Calculeu la seva pendent.

Exercici 114. Calculeu totes les equacions de la recta que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(-5,1)$.

Exercici 115. Donada la recta $y = 2x + 8$, calculeu:

a) el seu vector director,

b) l'equació de la recta paral · lela que passa pel punt $(0,-8)$,

c) un vector perpendicular a la recta,

d) l'equació de la recta perpendicular que passa pel punt $(0,-8)$.

Exercici 116. Calculeu els punts de tall dels parells de rectes següents:

a) $r\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4}$ i $s\colon 3x - 5y + 2 = 0$

b) $r\colon y = 6x - 10$ i $s\colon 9x - 3y + 27 = 0$

c) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon y = -x + 2$

d) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \end{cases}$

e) $r\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4}$ i $s\colon \frac{x}{10} = \frac{y+8}{-1}$

f) $r\colon 3x - 2y + 6 = 0$ i $s\colon 7y - 8x + 2 = 0$

g) $r\colon y = 4x - 2$ i $s\colon y = 10x - 8$

h) $r\colon y = 4x - 2$ i $s\colon y = 4x - 10$

i) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{3}$

j) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon 10x - 2y + 3 = 0$

k) $r\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+10}{-2}$ i $s\colon y = 10x - 12$

5

Geometria de l'espai

5.1 Sistema de coordenades espacials

De forma anàloga al pla cartesià, a l'espai tridimensional tenim tres eixos de coordenades, x, y i z, els quals són perpendiculars i parteixen d'un punt, anomenat *origen de coordenades*. La forma més usual de representar aquests eixos dibuixant l'eix x en la direccció dreta-esquerra, l'eix y en la direcció davant-darrera i l'eix z en la direcció dalt-baix (Figura 5.1)

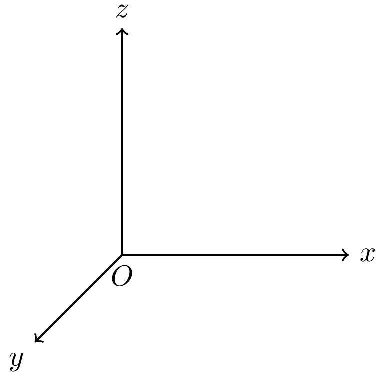


Figura 5.1: Representació usual del sistema de coordenades cartesianes

En aquest sistema de coordenades, un punt qualsevol P ve localitzat per les projeccions als eixos de coordenades. De la mateixa manera que el cas bidimensional, direm que P té *coordenades* (x, y, z) i el podrem denotar com $P(x, y, z)$. Per exemple, el punt de coordenades $(1, 2, 3)$ correspon al punt A de la figura següent (Figura 5.2).

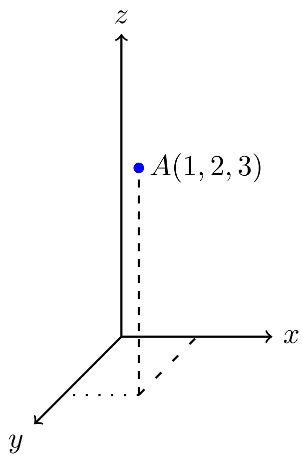


Figura 5.2: Representació del punt $A(1, 2, 3)$

Exercici 117. Representeu gràficament en els eixos de coordenades els punts $A\,(3, -2, 4)$ i $B\,(5, 0, -2)$.

5.2 Vectors

Les definicions relatives a vectors que hem estudiat a l'apartat de Geometria del pla (vector fix, vector lliure, extrems d'un vector, etc.; vegi's Capítol 4) poden adaptar-se fàcilment a l'espai només afegint una altra coordenada als vectors. A l'igual que al pla, suposarem que tots els vectors són lliures.

Exemple 69. Són vectors el següents:

$$\overrightarrow{B}(3, -2, 6),\ \overrightarrow{C}(-5, 1, -8)$$

Amb la convenció d'eixos del dibuix anterior (Figura 5.1), el vector $\overrightarrow{B}$ apunta cap a la dreta, cap a baix, i cap al lector, i el vector $\overrightarrow{C}$ apunta cap a l'esquerra, cap a dalt i s'allunya del lector. Com que no se'ns diu quins són els seus origens, es consider que aquests vectors són lliures i que, per tant, es poden situar on es desitgi els seus origens.

5.2.1 Base estàndard de vectors

Definició 42 (base estàndard de vectors). A l'espai cartesià, existeixen tres vectors que formen el que s'anomena *base estàndard de vectors* la qual està formada per tres vectors $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$, que tenen les coordenades següents:

$$\overrightarrow{i} = \overrightarrow{(1,0,0)},\ \overrightarrow{j} = \overrightarrow{(0,1,0)},\ \overrightarrow{k} = \overrightarrow{(0,0,1)}$$

Aquests vectors són unitaris, ortogonals (perpendiculars entre si) i formen un base: qualsevol vector es pot posar com a combinació lineal de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$[1]. És a dir, si $\overrightarrow{v}$ és un vector, aleshores existeixen nombres a, b i c de manera que $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$. Per les definicions de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ és clar que aquests a, b i c són els valors de les coordenades de v.

Exemple 70. El vector $\overrightarrow{v} = (3,2,2)$ compleix que $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. Es pot veure la seva representació a la figura següent (Figura 5.3).

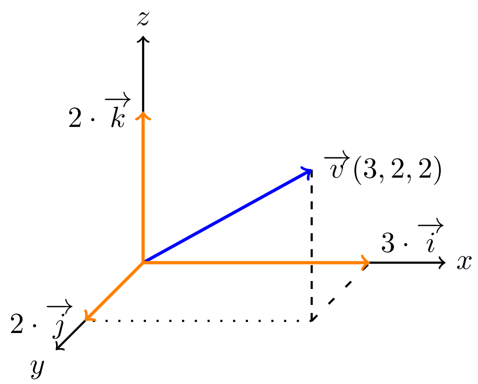


Figura 5.3: Descomposició lineal del vector $\overrightarrow{v}(3,2,2)$ respecte de la base estàndard

5.2.2 Operacions amb vectors anàlogues al pla

El mòdul d'un vector i les operacions de suma i resta de vectors, producte d'un escalar per un vector i producte escalar de dos vectors es defineixen de manera anàloga al pla:

- El mòdul d'un vector $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ es calcula com

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Per exemple, $|\overrightarrow{(3,-2,6)}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$.

[1] Les definicions de base d'un espai vectorial escapen a l'abast d'aquest text.

- Donats dos vectors $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$, la seva suma es defineix com $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.

  Per exemple, si $\overrightarrow{u} = (2, -3, 4)$ i $\overrightarrow{v} = (-2, -7, 0)$, aleshores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (0, -10, 4)$.

- La resta de dos vectors $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$ es defineix com $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$.

  Per exemple, si $\overrightarrow{u} = (2, -3, 4)$ i $\overrightarrow{v} = (-2, -7, 0)$, aleshores $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (4, 4, 4)$.

- Si $k \in \mathbb{R}$ és un nombre qualsevol i $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ és un vector, llavors el producte $k \cdot \overrightarrow{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, k \cdot u_3)$.

  Per exemple, si $\overrightarrow{u} = (2, -3, 4)$ i $k = -3$, aleshores $k \cdot \overrightarrow{u} = (-6, +9, -12)$.

- Dos vectors $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$ són paral · lels si, i només si, $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$ (vegi's proposició 6)

- Si $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$ són vectors, el seu producte escalar es defineix com

  $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

  Així per exemple, $\overrightarrow{(3, -2, 4)} \cdot \overrightarrow{(-1, 0, -5)} = -3 + 0 - 20 = -23$.

  Es verifica el resultat relatiu a l'angle entre dos vectors (proposició 7) i les propietats del producte escalar (teorema 8).

Exercici 118. Determineu si els vectors són paral · lels entre si:

a) $\overrightarrow{u}\,(2, -3, 1)$ i $\overrightarrow{v}\,(4, -6, 2)$

b) $\overrightarrow{u}\,(2, -3, 1)$ i $\overrightarrow{v}\,(4, -6, 3)$

Exercici 119. Què val l'angle format entre els vectors $\overrightarrow{u}(2, 0, -3)$ i $\overrightarrow{v}(-3, 1, 2)$?

5.2.3 Producte vectorial

Vegem tot seguit una operació nova: el producte vectorial entre vectors. Noteu la paraula *vectorial* (que no escalar) a aquesta expressió. La importància d'aquesta paraula és perquè el producte vectorial donarà com a resultat un vector mentre que el producte escalar dóna com a resultat un nombre.

Definició 43 (producte vectorial de vectors). El *producte vectorial de dos vectors*, $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{w}(w_1, w_2, w_3)$, que es denota per $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$ o $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$, respecte de la base estàndard, es defineix com:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} &= (u_1, u_2, u_3) \wedge (w_1, w_2, w_3) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aquest determinant es pot fer aplicant la regla de Sarrus (algorisme 1). O bé es pot desenvolupar per la tercera filera, obtenint que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right),\end{aligned}$$

que és útil per aquelles persones que volen memoritzar fórmules en comptes de realitzar càlculs.

Notem que el producte vectorial de dos vectors és, per tant, un altre vector.

Exemple 71. Siguin els vectors $\overrightarrow{u}(2,0,-3)$ i $\overrightarrow{v}(-3,1,2)$. Aleshores, el seu producte vectorial és:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} \\ &= 2\overrightarrow{k} + 0 + 9\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{i} + 0 - 4\overrightarrow{j} \\ &= 3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \\ &= (3,5,2)\end{aligned}$$

Exercici 120. Calculeu $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, amb $\overrightarrow{u}(0,-2,3)$ i $\overrightarrow{v}(-3,-5,4)$.

Proposició 16 (mòdul del producte vectorial)**.** *Donat dos vectors $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, el mòdul del seu producte vectorial $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ compleix que*

$$|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin \widehat{uv},$$

on $\widehat{uv}$ denota l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.

Vegem ara les propietats del producte vectorial.

5.2.3.1 Propietats del producte vectorial

Donats els vectors $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ i el nombre k qualssevol, el producte vectorial verifica les propietats següents:

a) $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$ (anticommutativa)

b) $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{a} = \vec{0}$

c) $k\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) = (k\overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \wedge \left(k\overrightarrow{b}\right)$

d) $\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}$

e) En general, $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}$

f) El vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ és perpendicular tant al vector $\vec{a}$ com al vector $\vec{b}$.

g) El mòdul del producte vectorial de dos vectors ens dóna l'àrea del paralel · ògram definit per aquest dos vectors (Figura 5.4):

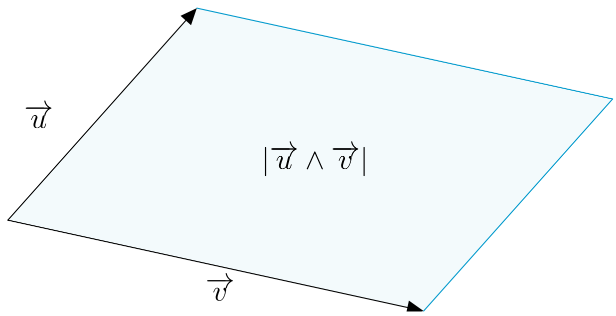


Figura 5.4: Àrea del paral · lelogram determinat pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

Observació 14. Com que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ i $\vec{b} \wedge \vec{a}$ són perpendiculars a $\vec{a}$ i $\vec{b}$, això vol dir que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ i $\vec{b} \wedge \vec{a}$ estan a la mateixa línia, un apuntant cap a baix i un apuntant cap a dalt. Per determinar l'orientació d'aquests dos vectors de forma gràfica existeix un procediment, anomenat *regla del llevataps*.

Exercici 121. Trobeu un vector que sigui perpendicular als vectors $\vec{a}(-4, 0, 3)$ i $\vec{b}(-3, -1, 0)$, simultàniament.

Exercici 122. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}(4, -2, 5)$ i $\vec{v}(3, 0, -5)$. Trobeu un altre vector ortonormal.

Exercici 123. Trobeu l'àrea del paral · lelogram que formen els vectors $\vec{u}(-2, 0, 4)$ i $\vec{v}(1, 3, -1)$.

5.2.4 Producte mixt

Tot seguit veurem una nova operació, entre tres vectors, la qual tendrà la principal aplicació de calcular volums de determinats prismes i piràmides (proposició 17, proposició 18).

Definició 44 (producte mixt). Donats tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, el seu *producte mixt*, que es denota per $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, es defineix com

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Notem que el producte mixt no és, en general, una operació commutativa. És a dir, el valor numèric del producte mixt depèn fortament de l'ordre dels vectors involucrats.

Exemple 72. Donats els vectors $\vec{u}\,(0,-1,5)$, $\vec{v}(2,0,-3)$ i $\vec{w}(-3,1,2)$, calculeu el producte mixt $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$.

Tenim que

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] &= \overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})\\ &= (0,-1,5)\cdot((2,0,-3)\wedge(-3,1,2))\\ &= (0,-1,5)\cdot(3,5,2)\\ &= 0-5+10=5.\end{aligned}$$

Observació 15. Per a qualssevol vectors $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3)$ i $\overrightarrow{w}=(w_1,w_2,w_3)$, el producte mixt $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$ també es pot calcular amb la fórmula següent:

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix},$$

és a dir, els vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ disposats per fileres al determinant.

Exemple 73. Donats els vectors $\vec{u}\,(0,-1,5)$, $\vec{v}(2,0,-3)$ i $\vec{w}(-3,1,2)$, calculeu $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$:

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5\\ 2 & 0 & -3\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-9+10+4=5.$$

Exercici 124. Calculeu $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$, amb $\vec{u}\,(3,1,-2)$, $\vec{v}(-2,10,0)$ i $\vec{w}(0,-1,-5)$.

Definició 45 (paral · lelepípede). Un *paral · lelepípede* és un prisme la base del qual és un paral · lelogram (Figura 5.5).

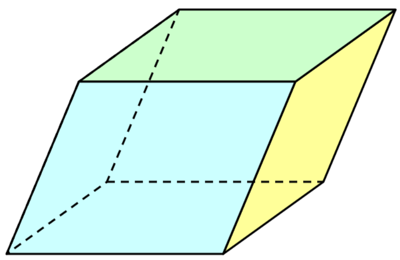


Figura 5.5: Un paral · lelepípede

Proposició 17 (càlcul del volum d'un paral · lelepípede). *Donat el paral · lelepípede definit pels vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ (vegeu Figura 5.6), el seu volum V_p és igual al valor absolut del producte mixt, és a dir,*

$$V_p=|[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]|$$

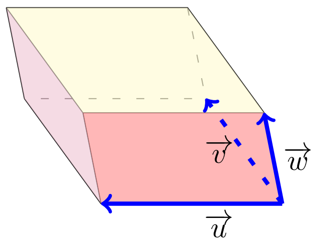


Figura 5.6: Volum del paral · lelepípede definit pels vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$

Definició 46 (tetraedre). Un *tetraedre* és una piràmide amb totes les cares iguals entre si i iguals a triangles equilàters.

Proposició 18 (càlcul del volum d'un tetraedre). *Donat el tetraedre format pels vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$, el seu volum V_t és igual a:*

$$V_t = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \right| .$$

5.3 La recta a l'espai

En aquest apartat farem un estudi de la recta en un espai de tres dimensions.

Si d'una recta coneixem un punt qualsevol d'aquesta i un vector tengui la mateixa direcció (és a dir, que estigui situat sobre ella o bé que estigui situat sobre una recta paral · lela), llavors tenim elements suficients per a determinar-la completament, és a dir, per a determinar les coordenades de qualsevol punt.

En altres paraules, basta que coneguem un punt de la recta P_0 i el seu *vector director* $\overrightarrow{v}$.

Definició 47 (equació vectorial de la recta). Una recta r es pot determinar per un punt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la recta i un vector director $\overrightarrow{v}$, de manera que, per a qualsevol punt $P(x, y, z)$ pertanyent a la recta, es té que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \overrightarrow{v}, \tag{5.1}$$

per qualque $\lambda \in \mathbb{R}$ (Figura 5.7). Aquesta equació (5.1) es coneix com a *equació vectorial de la recta*.

5.3.1 Equació paramètriques de la recta

Sigui r una recta determinada per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punt qualsevol i $\overrightarrow{v}(v_x, v_y, v_z)$ és el seu vector director. Aleshores un punt $P(x, y, z)$ de la recta compleix l'equació vectorial (Equació 5.1), és a dir, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \overrightarrow{v}$,

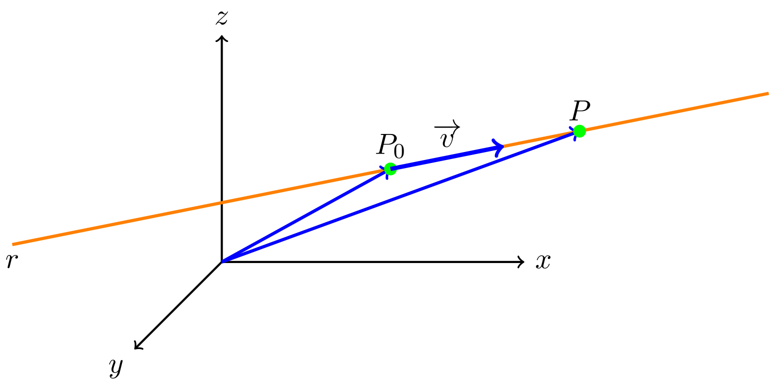


Figura 5.7: Representació de la recta que té vector director $\overrightarrow{v}$ i que passa per P_0.

per qualque $\lambda \in \mathbb{R}$, o sigui, $\overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{(x_0,y_0,z_0)} + \lambda\overrightarrow{(v_x,v_y,v_z)}$. Operant, tenim que s'ha de verificar que

$$\overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{(x_0+\lambda v_x, y_0+\lambda v_y, z_0+\lambda v_z)}.$$

Si dos vectors són iguals, llavors component a component són iguals. El que implica que

$$r\colon \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases}, \tag{5.2}$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$. Aquesta equació (Equació 5.2), reb el nom de *equació paramètrica de la recta*.

Exemple 74. Si una recta passa pel punt $(0,-1,3)$ i el seu vector director és el $\overrightarrow{v}(-3,2,0)$, llavors la seva equació paramètrica és la següent:

$$\begin{cases} x = 0 + \lambda\cdot(-3) \\ y = -1 + \lambda\cdot 2 \\ z = 3 + \lambda\cdot 0 \end{cases}, \text{ és a dir, } \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

Per trobar més punts d'aquesta recta basta substituir λ per qualsevol nombre a les expressions anteriors.

Exemple 75. Si a la recta anterior (exemple 74), feim $\lambda = 2$, tenim que

$$\left.\begin{array}{l} x = -6 \\ y = -1 + 4 = 3 \\ z = 3 \end{array}\right\},$$

i, per tant, $(-6,3,3)$ és un altre punt de la recta.

Exercici 125. Escriviu les equacions paramètriques de les rectes següents:

a) recta que passa pel punt $(-1, 0, 2)$ i que té la direcció donada pel vector director $\overrightarrow{v}(1, 3, -5)$

b) recta que passa per l'origen de coordenades i que té com a vector director $\overrightarrow{(1, -2, 0)}$

c) recta que passa pels punts $(3, -5, 2)$ i $(2, -7, -3)$

Trobeu dos punts més de cada recta.

5.3.2 Equació contínua de la recta

Si aïllam λ en cadascuna de les equacions de la recta en forma paramètrica (Equació 5.2), tenim que

$$\lambda = \frac{x - x_0}{v_x}, \ \lambda = \frac{y - y_0}{v_y}, \ \lambda = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Si igualam les expressions, obtenim el que s'anomena *equació en forma contínua de la recta* (o simplement *equació contínua*):

$$r\colon \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}, \tag{5.3}$$

on $P(x_0, y_0, z_0)$ és un punt qualsevol de la recta i $\overrightarrow{v}(v_x, v_y, v_z)$ és el seu vector director.

Exemple 76. La recta r que passa pel punt $(0, -1, 3)$ i té com a vector director $\overrightarrow{v}(-3, 2, 0)$ té com a equació contínua:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 3}{0}$$

Observació 16. Observem que en aquest exemple ha aparegut un denominador igual a 0. A pesar de què la divisió per 0 no és una operació que estigui definida, en el context de l'equació contínua d'una recta, aquesta expressió està permesa.

Exercici 126. Escriviu les equacions contínues de la rectes següents:

a) recta que passa per $(0, -5, 3)$ i que té vector director $\overrightarrow{v}(1, -2, 2)$

b) recta que passa pels punts $(6, -2, 0)$ i $(2, -1, -1)$

c) recta que passa pel punt $(-1, -1, 2)$ i que té com a vector director $\overrightarrow{v}(2, 0, -3)$.

5.3.3 Equació implícita de la recta

Si a les equacions de la recta en forma contínua (Equació 5.3) llevam els denominadors i transposem tots els termes al primer membre, obtindrem dues equacions de la forma:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}, \tag{5.4}$$

on A, B, C, D, A', B', C' i D' són nombres reals. Aquestes equacions reben el nom d'*equació implícita de la recta*.

Exemple 77. La recta r que passa pel punt $(0, -1, 3)$ i que té vector director $\overrightarrow{v}(-3, 2, 0)$ té l'equació contínua:

$$r\colon \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{0}$$

(vegis' exemple 76). Per tant, obtenim que:

$$r\colon \begin{cases} 2x &= -3\,(y+1) \\ 0\,(y+1) &= 2\,(z-3) \end{cases}$$

Operant, obtenim que la seva equació implícita és

$$r\colon \begin{cases} 2x + 3y + 3 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

Exercici 127. Trobeu les equacions implícites de les rectes de l'exercici 126.

Observació 17. Noteu que en principi no podem obtenir l'equació implícita d'una recta directament amb el seu vector director i un punt d'aquesta. Hem de passar per l'equació contínua per obtenir l'equació implícita.

5.3.3.1 Pas de l'equació implícita a l'equació paramètrica

Resulta més o menys fàcil tornar enrera i obtenir l'equació paramètrica d'una recta a partir de la seva equació implícita. L'únic que s'ha de fer és *parametritzar* una variable, és a dir, substituir una variable per un paràmetre (per exemple λ).

Exemple 78. Trobeu les equacions paramètriques de la recta

$$r\colon \begin{cases} 2x + y + 2z + 4 = 0 \\ x - y + 4z + 12 = 0 \end{cases}$$

Fent $z = \lambda$, tenim que

$$r\colon \begin{cases} 2x + y = -4 - 2\lambda \\ x - y = -12 - 4\lambda \end{cases}$$

Per tant, per reducció, tenim que $3x = -16 - 6\lambda$ i, per tant, $x = \frac{-16}{3} - 2\lambda$. Substituïnt aquest resultat a la segona equació de l'anterior sistema, tenim que

$$\begin{aligned} y &= -\frac{16}{3} - 2\lambda + 4\lambda + 12 \\ &= \frac{20}{3} + 2\lambda \end{aligned}$$

Amb tot, tenim que les equacions paramètriques de la recta són:

$$r\colon \begin{cases} x = -\dfrac{16}{3} - 2\lambda \\ y = \dfrac{20}{3} + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

5.3.3.2 Vector director a partir de l'equació implícita

La proposició següent dóna una manera per trobar el vector director d'una recta que ve donada mitjançant l'equació implítica.

Proposició 19 (vector director a partir de l'equació implícita). *Sigui r una recta donada amb l'equació implícita:*

$$r\colon \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

El seu vector director, v_r, es pot calcular amb la fórmula:

$$\overrightarrow{v_r} = (A, B, C) \wedge (A', B', C') \tag{5.5}$$

Exemple 79. El vector director de la recta

$$r\colon \begin{cases} 2x + 3y + 3 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

és $\overrightarrow{v} = (2,3,0) \wedge (0,0,2)$, és a dir,

$$\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = (6, -4, 0)\,.$$

Exercici 128. Calculeu el vector director de les rectes:

a) $\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ 4x + y - 5z - 6 = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x - z - 5 = 0 \\ 3x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$

c) $\left\{ \begin{array}{r} 2x = 0 \\ 2z + y = 0 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y + 5z - 2 = 0 \\ 4x + 6y + 10z - 4 = 0 \end{array} \right.$

5.3.3.3 Exercicis d'equacions de rectes

Tenim diverses equacions per a expressar una recta (Figura 5.8). Practiquem el pas d'unes a les altres.

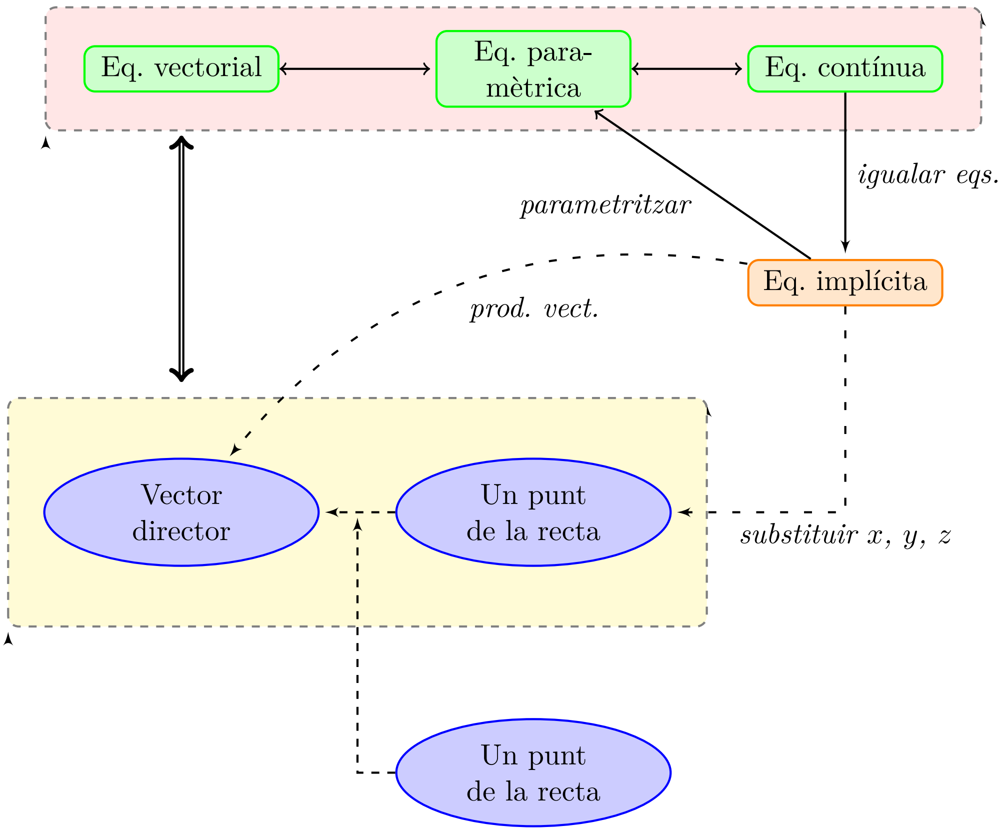


Figura 5.8: Relacions entre les equacions d'una recta

Exemple 80. Trobeu totes les equacions de la recta que passa pel punt $P(3, -2, 0)$ i que té per vector director $\overrightarrow{v}(1, 0, -1)$.

Tenim que:

- L'equació vectorial és

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{(3, -2, 0)} + \lambda\overrightarrow{(1, 0, -1)}$$

- Les equacions paramètriques són

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

- L'equació contínua és

$$r : x - 3 = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{-1}$$

- I les equacions implícites són

$$r : \begin{cases} 0 \cdot (x-3) & = & y+2 \\ -1 \cdot (x-3) & = & z \end{cases}, \text{ és a dir, } r : \begin{cases} y+2 & = & 0 \\ -x - z + 3 & = & 0 \end{cases}$$

Exercici 129. Trobeu totes les equacions de les rectes següents:

a) Recta que té vector director $\overrightarrow{(2,-3,-1)}$ i passa per $(0,2,-10)$

b) Recta que passa pels punts $(7,-4,0)$ i $(3,0,-5)$

c) Recta donada per l'equació $\overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{(3,2,1)} + \lambda\overrightarrow{(-1,0,1)}$, amb (x,y,z) un punt qualsevol de la recta.

d) Recta donada per $r\colon \frac{x-3}{5} = y + 3 = \frac{z+2}{-2}$

e) La recta $s\colon \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 4x + 7z = 0 \end{cases}$

5.3.3.4 Rectes paral · leles

Donada una recta r que té vector director $\overrightarrow{v}$ i passa per P, si volem trobar una recta paral · lela s que passi per Q, només hem de notar que s tendrà $\overrightarrow{v}$ com a vector director i passarà per Q.

Exemple 81. Calculeu l'equació de la recta paral · lela a $r\colon \frac{x}{-4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{2}$ que passa pel punt $A(2,5,-1)$.

Donat que la recta que cercan és paral · lela a la recta r, ambdues tenen el mateix vector director: $\overrightarrow{v}(-4,3,2)$. A més, sabem que la recta ha de passar pel punt $A(2,5,-1)$. Llavors, si subtituïm aquestes dues dades, per exemple, a l'equació contínua de la recta, obtindrem:

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{2}$$

Exercici 130. Donada la recta $r : \{x = 3 + \lambda,\ y = -2,\ z = -\lambda\}$ en forma paramètrica, trobeu l'equació contínua de la recta paral · lela a r que passa pel punt $A(0,-8,6)$.

Exercici 131. Trobeu l'equació paramètrica de la recta s que passa per $(0,4,4)$ i és paral · lela a $r\colon \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ \quad 8x - 7z = 0 \end{cases}$.

5.4 El pla a l'espai

Per definir un pla a l'espai necessitam tres punts A, B i C no alineats, o equivalentment, un punt A, per on passa el pla, i dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ linealment independents[2] (la definició de vectors linealment dependents és anàloga a la de línies d'una matriu. Vegi's definició 28) — en el cas de només tenir dos vectors, tendríem infinits plans paral · lels. Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ s'anomenen *vectors directors* del pla.

D'aquesta manera, si π és el pla determinat per A, i els vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, aleshores un punt P que pertanyi a π compleix que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Però $\overrightarrow{AP}$ és suma dels vectors $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{AN}$, que són múltiples de $\vec{u}$ i $\vec{v}$. És a dir,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \end{aligned}$$

per qualques λ, $\mu \in \mathbb{R}$ (Figura 5.9). En resum,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \tag{5.6}$$

amb λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Aquesta equació (Equació 5.6), s'anomena *l'equació vectorial del pla*.

5.4.1 Equacions paramètriques del pla

A partir de l'equació vectorial del pla (Equació 5.6), igualant coordenades s'obtenen les *equacions paramètriques del pla*: si π és un pla determinat pel punt $A(x_1, y_1, z_1)$ i els vectors directors $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, aleshores les equacions paramètriques de π són:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= y_1 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= z_1 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned}\right\}, \tag{5.7}$$

on $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Recordeu que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors no proporcionals entre si.

[2] L'equivalència, resulta prenent $\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.

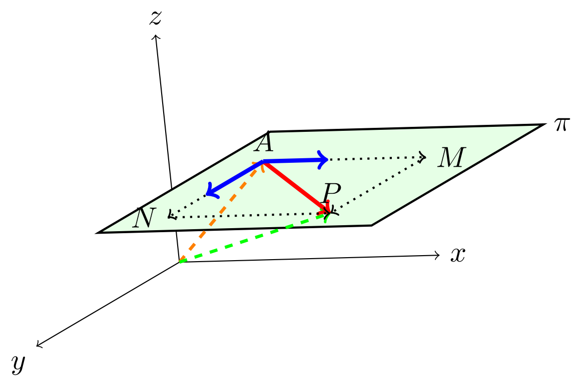


Figura 5.9: Representació de les equacions vectorials d'un pla

Observació 18. Si donam valors qualssevol als paràmetres λ i μ i els substituim a l'expressió anterior, aleshores trobarem punts del pla en qüestió.

Exemple 82. Sigui π el pla que conté el punt $(2, 0, -3)$ i que els vectors $(0, 3, -1)$ i $(2, 5, 0)$ (els quals no són proporcionals entre si). Volem trobar dos punts de π a més del que ja sabem.

L'equació paramètrica de π és

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2 \\ y = 0 + \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 5 \\ z = -3 + \lambda \cdot (-1) + \mu \cdot 0 \end{array}\right\} \text{ i.e., } \left.\begin{array}{l} x = 2 + 2\mu \\ y = 3\lambda + 5\mu \\ z = -3 - \lambda \end{array}\right\}$$

Si donam valors a λ i μ obtenim altres punts del pla:

- Fent $\lambda = 0$ i $\mu = 1$, obtenim que $x = 4$, $y = 5$ i $z = -3$. Per tant, $(4, 5, -3)$ pertany a π.

- Fent $\lambda = 1$ i $\mu = 0$, obtenim que $x = 2$, $y = 3$ i $z = -4$. Per tant, $(2, 3, -4) \in \pi$.

Exercici 132. Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $(0, 0, -8)$ i que és paral · lel als vectors $\vec{u}(2, 0, -5)$ i $\vec{v}(1, 1, 9)$. Trobeu tres punts més del pla. Trobeu un vector més que pertanyi al pla (a partir dels punts que heu trobat o bé a partir de combinació lineal de $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$).

5.4.2 Equació general del pla

El darrer tipus d'equació del pla és l'*equació general*. L'equació general té la forma

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0,$$

on A, B, C i D són nombres qualssevol. Per trobar l'equació general d'un pla π determinat pels vectors $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ i que passa pel punt $P = (a, b, c)$, es pot emprar la fórmula següent (Equació 5.8):

$$\begin{vmatrix} x-a & u_1 & v_1 \\ y-b & u_2 & v_2 \\ z-c & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{5.8}$$

Exemple 83. Seguint amb el pla de l'exemple anterior (exemple 82), tenim que tots els seus punts compleixen l'equació

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ y-0 & 3 & 5 \\ z-(-3) & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Calculant el determinant,

$$\pi \equiv -2y - 6\,(z+3) + 5\,(x-2) = 0,$$

és a dir,

$$\pi \equiv 5x - 2y - 6z - 28 = 0$$

Exercici 133. Trobeu l'equació general del plans:

a) El pla π_1 que té com a vectors directors $\overrightarrow{(3, -2, 3)}$ i $\overrightarrow{(1, 1, 1)}$ i passa pel punt $(2, 2, 4)$

b) El pla π_2 que passa pel punt $(0, 1, -2)$ i és paral · lel als vectors $\vec{u} = (0, 2, 4)$ i $\vec{v} = (4, 4, 2)$

c) El pla que té vectors directors $\vec{u}(1, 0, 0)$ i $\vec{v}(0, 0, 1)$ i passa per $(0, 2, 2)$.

5.4.2.1 Pas de l'equació general a la paramètrica

Notem que, si tenim un pla π expressat mitjançant una equació paramètrica, aleshores és relativament senzill expressar π mitjançant l'equació general. El motiu és que en l'equació paramètrica del pla tenim els vectors directors i un punt de π. Per tant, simplement aplicarem la fórmula Equació 5.8.

Exemple 84. Suposem que π té l'equació paramètrica:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -\lambda - 2\mu \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

Volem expressar π amb l'equació general.

Llavors de l'equació paramètrica, tenim que π té com a vectors directors $\vec{u}(0,1,-1)$ i $\vec{v}(1,-2,0)$ i que passa pel punt $P(1,0,-2)$. Per tant, aplicant la fórmula de l'equació general (Equació 5.8) tenim que:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y & 1 & -2 \\ z+2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

és a dir,

$$\pi \equiv -2x - y - z = 0$$

Si volem fer le procés invers, és a dir, passar de l'equació general a l'equació paramètrica, llavors el procés és més llarg, ja que no *veiem* els vectors directors ni els punts per on passa π de l'equació general. Donat $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un pla qualsevol, si volem trobar la seva equació paramètrica el que hauríem de fer seria:

a) Trobar tres punts del pla P, Q i R

b) Amb aquests punts trobar dos vectors del pla: per exemple $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$.

c) Calcular l'equació paramètric amb els vectors anteriors i un punt del pla (per exemple P).

Exemple 85. Suposem que tenim el pla $\pi\colon 2x - 5y - z + 3 = 0$ i volem trobar la seva equació paramètrica.

a) Trobem tres punts de π:

- Si prenem $y = 0$ i $z = 1$, tenim que $x = -1$. Per tant, el punt $P(-1,0,1)$ pertany a π
- Si prenem $x = 0$ i $y = 0$, tenim que $z = 3$. Per tant, el punt $Q(0,0,3)$ pertany a π
- Si prenem $x = 5$ i $z = 3$, tenim que $y = 2$. Per tant, $R(5,2,3) \in \pi$

b) Trobem dos vectors que pertanyen a π:

- $\vec{u} = (1,0,2)$ prenent P i Q com a extrems
- $\vec{v} = (6,2,2)$ prenent P i R com a extrems. En comptes de $\vec{v}$ prenem $\vec{w}(3,1,1)$ com a vector director de π, ja que té nombres menors (si $\vec{v}$ pertany a π, aleshores $\vec{w}$ també hi pertany, ja que són proporcionals)

c) Calculem l'equació general de π (prenent Q com a punt de π):

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 0 & 1 \\ z-3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

és a dir, $\pi \equiv -2x + 5y + z - 3 = 0$.

5.4.2.2 Vector normal al pla a partir de l'equació general

Donat un pla π, en aquesta secció trobarem un vector perpendicular a π a partir de la seva equació general, el qual anomenarem *vector normal*.

Definició 48 (vector normal d'un pla). Donat el pla $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, definirem el seu *vector normal*, que denotarem habitualment per $\vec{n}_\pi$ (o simplement $\vec{n}$), com

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

Proposició 20 (perpendicularitat del vector normal). *Donat un pla qualsevol π, $\vec{n}$ és perpendicular a π, és a dir, el vector normal sempre és perpendicular al seu pla (Figura 5.10).*

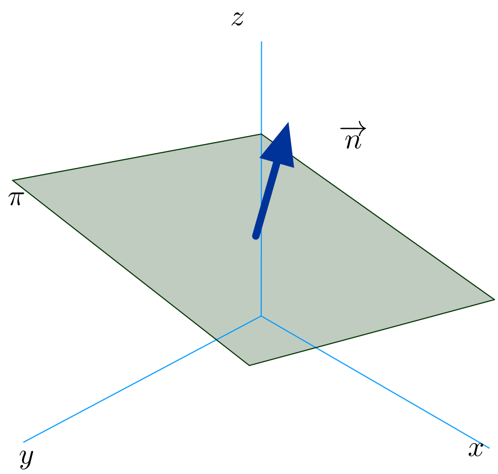


Figura 5.10: Vector normal a un pla

Exemple 86. Un vector perpendicular al pla $\pi\colon 5x - 2y - 6z - 28 = 0$ és el vector $\vec{n}\,(5, -2, -6)$.

Exercici 134. Trobeu el vector normal al pla $x - 5y + 8z + 4 = 0$.

L'aplicació inversa del vector normal d'un pla és trobar un pla que és perpendicular a un vector donat. És a dir, donat $\vec{u}$ un vector, trobar un pla π tal que π és perpendicular a $\vec{u}$. Sabem que un pla perpendicular a $\vec{u}$ serà aquell que tengui $\vec{u}$ com al seu vector normal. Tot seguit, veurem un exemple.

Exemple 87. Volem trobar un pla π perpendicular al vector $\overrightarrow{v}\,(3, -1, 7)$ i que passi pel punt $A(2, -4, 0)$.

Un pla perpendicular al vector $\overrightarrow{v}\,(3, -1, 7)$, és aquell que té l'equació general de la forma

$$\pi \equiv 3x - y + 7z + D = 0,$$

ja que tendria $\vec{u}$ com al seu vector normal (vegi's proposició 20).

D'altra banda, sabem que el punt A és de π, per tant, compleix les equacions del pla. Llavors:

$$3 \cdot 2 - (-4) + 7 \cdot 0 + D = 0$$

D'aquí es té que $D = -10$, i l'equació del pla és

$$\pi \equiv 3x - y + 7z - 10 = 0$$

Observació 19. Hem vist abans una fórmula per a calcular el vector director d'una recta a partir de les seves equacions implícites (proposició 19). És el moment de justificar aquest resultat amb l'ús dels vectors normals: notem que si r és una recta donada per les seves equacions implícites

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases},$$

amb A, B, C, D, A', B', C' i $D' \in \mathbb{R}$, aleshores el seu vector director $\overrightarrow{v_r}$ és el vector ortogonal als vectors normals dels plans que defineixen la recta r.

És a dir, podem veure la recta r com la intersecció de dos plans π i ρ d'equacions $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$ i $\rho\colon A'x + B'y + C'z + D' = 0$. En aquest sentit, $\overrightarrow{v_r}$ tendrà la mateixa direcció que $\overrightarrow{n_\pi} \wedge \overrightarrow{n_\rho}$, on $\overrightarrow{n_\pi}$ i $\overrightarrow{n_\rho}$ són els vectors normals dels plans π i ρ respectivament (Figura 5.11).

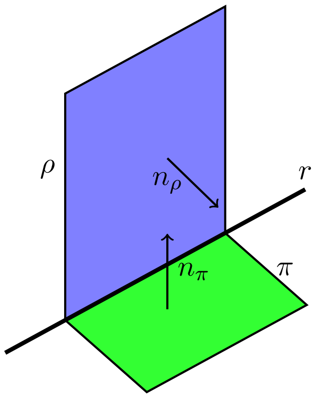


Figura 5.11: Vector director d'una recta com a producte vectorial dels vectors normals dels plans que la defineixen

5.4.3 Plans paral · lels

Donat un pla π_0, un pla *paral · lel* π_1 és un pla tal que té els *mateixos* vectors directors[3] i passa per un punt que no pertany a π_0 (en el cas que

[3] Realment, no tenen perquè ser els mateixos vectors directors. En general, dos plans són paral · lels quan els vectors directors de primer són combinació lineal dels vectors directors de segon i inversament. Ara bé, sempre podríem triar els mateixos vectors directors per als dos plans.

passàs per un punt de π_0, els plans serien *coincidents*, és a dir, el mateix; vegi's Secció 5.5). Per tant, podem trobar les equacions paramètriques o generals de π_1, segons convengui, amb la informació proporcionada.

Exemple 88. Trobeu l'equació del pla paral · lel a $\pi : 3x - y + z - 8 = 0$ que passa pel punt $A(-2, -2, 6)$.

Si el pla que cercam és papal · lel al pla π, ambdós tendran el mateix vector normal. Per tant, la seva equació serà de la forma

$$3x - y + z + D = 0,$$

amb D un nombre. Com que el pla que volem trobar passa pel punt A, llavors A complirà l'equació del pla anterior:

$$3 \cdot (-2) - (-2) + 6 + D = 0;$$

Per tant, $D = -2$. Llavors el pla que cercam és $3x - y + z - 2 = 0$.

Exercici 135. Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $A(5, -1, 0)$ i és paral · lel al pla $-x + 3y - 8 = 0$.

5.5 Posició relativa entre rectes i plans

5.5.1 Posició relativa entre dues rectes

Podem suposar que tenim dues rectes r i s i que d'aquestes coneixem els seus vectors directors i un punt pel qual passen. Aquestes dades són bones d'obtenir si les rectes estan en forma de l'equació vectorial, paramètrica o contínua. Si alguna de les rectes es dóna en forma implícita, podem passar-la a forma paramètrica (Subsubsecció 5.3.3.1) o bé trobar el seu vector director i un punt usant el producte vectorial (Subsubsecció 5.3.3.2).

Per tant, suposarem que r té com vector director $\vec{v}$ i passa per A, mentre que s té com a vector director $\vec{w}$ i passa per B.

- Si $rg(\vec{u}, \vec{w}) = 1$, aleshores $\vec{u}$ i $\vec{w}$ són linealment dependents. Per tant, tenen la mateixa direcció. Llavors r i s poden ser *coincidents* (si tenen una infinitat de punts en comú) o *paral · leles* (si no tenen cap punt en comú).
  - Si són coincidents, llavors el vector $\overrightarrow{AB}$ té la mateixa direcció que $\vec{u}$ i $\vec{w}$, és a dir, $rg(\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 1$.
  - Si són paral · leles, llavors el vector $\overrightarrow{AB}$ no té la mateixa direcció que $\vec{u}$ i $\vec{w}$ i, per tant, $rg(\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 2$.
- Si $rg(\vec{u}, \vec{w}) = 2$, llavors $\vec{u}$ i $\vec{w}$ són linealment independents, Per tant, tenen diferent direcció. Llavors les rectes poden ser *secants* (es tallen en un punt) o bé es *creuen* (no tenen cap punt en comú)

  Raonant de manera anàloga al cas anterior,

– Si són secants, llavors $rg(\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 2$.
– Si es creuen, llavors $rg(\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 3$.

Tot això queda reflexat en les proposicions següents:

Proposició 21 (posició relativa de dues rectes usant proporcionalitat de vectors). *Donades dues rectes r i s amb vectors directors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ i que passen pels punts $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$ respectivament, tenim que la seva posició relativa es pot determinar amb l'arbre de decisió següent:*

- *Si $\vec{u}$ és proporcional a $\vec{w}$ (vegeu proposició 6), aleshores les rectes poden ser coincidents o paral·leles.*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ és proporcional a $\vec{u}$ (i per tant a $\vec{w}$), llavors r i s són coincidents*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ no és proporcional a $\vec{u}$ (i per tant tampoc a $\vec{w}$), llavors r i s són paral·leles*
- *Sinó, llavors les rectes són secants o bé es creuen.*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ és propocional a $\vec{u}$, llavors r i s són secants*
  - *Sinó, si $\overrightarrow{AB}$ és proporcional a $\vec{w}$, llavors r i s són secants*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ no és proporcional ni a $\vec{u}$ ni a $\vec{w}$, llavors r i s es creuen*

Proposició 22 (posició relativa de dues rectes usant matrius). *Donades dues rectes r i s amb vectors directors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ i que passen pels punts $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$ respectivament, tenim que la seva posició relativa ve donada pels rangs següents:*

- $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 1$ *i* $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 1$, *$r$ i s són coincidents*
- $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 1$ *i* $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2$, *$r$ i s són paral·leles*
- $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$ *i* $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2$, *$r$ i s es tallen*
- $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$ *i* $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 3$, *$r$ i s es creuen*

Exercici 136. Determineu la posició relativa d'aquestes rectes:

a) $r\colon \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$

b) $r\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{5}$

c) $r\colon x = y - 1 = \frac{z+2}{3}$ i $s\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{6}$

d) $r\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ x - 2y + z = 10 \end{cases}$

e) $r\colon \begin{cases} -y - z = 3 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases}$

5.5.2 Posició relativa d'una recta i un pla

Per a determinar la posició relativa entre un pla i una recta tenim dues opcions: estudiar la posició a partir de les equacions implícita de pla i recta o bé estudiar-la a partir de les posicions relatives entre el vector normal del pla i el vector director de la recta. Els dos estudis es resumeixen a les proposicions següents.

Proposició 23 (posició relativa entre pla i recta (versió eq. implítica)). *Siguin* $\pi \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *i* $r \equiv \begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$ *un pla i una recta de l'espai qualssevol. Podem construir les matrius de* A *i* M*:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Aleshores:

- *Si* $rgA = 3$ *i* $rgM = 3$*, llavors el sistema és compatible determinat. Per tant, la recta talla al pla*
- *Si* $rgA = 2$ *i* $rgM = 2$*, llavors el sistema és compatible indeterminat. Per tant, la recta està continguda en el pla*
- *Si* $rgA = 2$ *i* $rgM = 3$*, llavors el sistema és incompatible. Per tant, la recta i el pla són paral·lels*

Proposició 24 (posició relativa entre pla i recta (versió vector normal)). *Siguin* π *un pla i* r *una recta del pla. I sigui* $\vec{v}$ *el vector director de* r *i* A *un punt de la recta. Aleshores:*

- *Si $\vec{v}$ és perpendicular al vector normal del pla $\vec{n}$ i $A \in \pi$, llavors r està continguda a π*
- *Si $\vec{v}$ és perpendicular al vector normal del pla $\vec{n}$ però $A \notin \pi$, llavors r és paral · lela a π*
- *Si $\vec{v}$ no és perpendicular a $\vec{n}$, llavors la recta i el pla es tallen*

Exemple 89. Determineu la posició relativa de $r\colon \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ i $\pi\colon x+y-z+3=0$.

- Primer trobam les matrius de coeficients i ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calculem el rang de cada matriu. Després d'alguns càlculs tenim que $rgA = 3$ i $rgM = 3$. Per tant, el sistema és compatible determinat i, per tant, el pla i la recta són secants.

Exemple 90. Siguin $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{6}$ i $\pi\colon 2x-4y+5z=0$. Determineu la seva posició relativa.

- Tenim que el vector director de r, $\vec{v}(3,9,6)$, i el vector normal del pla, $\vec{n}(2,-4,5)$, són perpendiculars: $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$. Per tant, la regla pot ser continguda al pla o bé paral · lela.
- Per discriminar, vegem si el pla conté o no un punt de la recta: sabem que $A(1,2,0) \in r$. Però si substituïm a les equacions de π, tenim que: $2\cdot 1 - 4\cdot 2 + 5\cdot 0 = -6 \neq 0$. Per tant, r és paral · lela a π.

Exercici 137. Determineu les posicions relatives entre aquests plans i aquestes rectes:

a) $r\colon \begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ i $\pi \equiv 4x-3y+7z-7=0$

b) $r\colon \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ -x+3y-z+1=0 \end{cases}$ i $\pi \equiv x+z+1=0$

c) $r\colon x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ i $\pi \equiv 2x-5y+3z+3=0$

d) $r\colon \begin{cases} 2x+y-2z+2=0 \\ -x+3y-z+1=0 \end{cases}$ i $\pi \equiv x+4y-3z+3=0$

Exercici 138. Trobeu el valor de α per a què la recta $r \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{\alpha} = \frac{z}{12}$ no talli al pla $\pi\colon 2x-4y+5z=0$.

Exercici 139. Donats el pla $\pi\colon x+y+mz=1$ i la recta $r\colon \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$, discutiu quina és la posició relativa de r i π segons els valors de m.

5.5.3 Posició relativa entre dos plans

Finalment estudiarem la posició relativa entre dos plans. Suposarem que els plans sempre vénen donats mitjançant les seves equacions generals.

Proposició 25 (posició relativa entre dos plans (versió rangs de matrius)). *Siguin* $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *i* $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *dos plans qualssevol. Considerem les matrius de coeficients i ampliada,* A *i* M *respectivament:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Llavors:

- *Si* $rgA = 2$*, llavors* $rgM = 2$ *i, per tant, el sistema és compatible simplement indeterminat (2 equacions i 3 incògnites). Això significa que els plans es tallen*
- *Si* $rgA = 1$*:*
  - *Si* $rgM = 2$*, llavors el sistema és incompatible. Per tant, no tenen punts en comú. Llavors els plans són paral·lels*
  - *Si* $rgM = 1$*, llavors el sistema és compatible doblement indeterminat (1 equació i 3 incògnites). Això significa que els plans són coincidents.*

Disposem d'una proposició que estudia la posició relativa a partir de la proporcionalitat dels seus vectors normals.

Proposició 26 (posició relativa entre dos plans (versió vectors normals)). *Siguin* $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *i* $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *dos plans qualssevol. Considerem* $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ *i* $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ *els seus vectors normals.*

- *Si* $\vec{n}_1$ *és proporcional a* $\vec{n}_2$*, llavors els plans són o bé coincidents o bé paral·lels.*

  Com que aquests vectors són proporcionals, llavors $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ *és igual a un nombre. Diguem-li* R*.*
  - *Si* $\frac{D_1}{D_2} = R$*, llavors* π_1 *és coincident amb* π_2
  - *Sinó,* π_1 *és paral·lel a* π_2
- *En cas contrari, els plans es tallen*

Exercici 140. Determineu la posició relativa dels plans següents:

a) $\pi_1 = 3x - 2y + 4z = 2$ i $\pi_2 = 2x + 3y - 5z = -8$

b) $\pi_1 = -x + 2y - z = 0$ i $\pi_2 = x - 2y + z = 0$

c) $\pi_1 = x - z = -11$ i $\pi_2 = -2y - z = -11$

d) $\pi_1 = 3x - 2y + 4z = 2$ i $\pi_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = -1 + \mu \end{array} \right.$

5.6 Càlcul de la intersecció entre rectes i plans

En aquesta secció calcularem la intersecció entre rectes, plans i rectes i plans. No determinarem abans la seva posició relativa. Calcularem els punts (o rectes) d'intersecció *a pèl*.

5.6.1 Intersecció entre dos plans

Exemple 91. Trobeu l'equació de la recta determinada per la intersecció dels plans $\pi_1\colon x - 2y + z + 3 = 0$ i $\pi_2\colon 2x - y + z - 4 = 0$.

La recta que cercam (veure (Subsecció 5.3.3) és

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{array} \right. ,$$

que, com es veu, ve definida per la intersecció de dos plans (si volem es pot passar a la forma paramètrica (Subsubsecció 5.3.3.1).

Exercici 141. Trobeu la intersecció entre els plans següents:

a) $\pi_1\colon x + 3y + z - 5 = 0$ i $\pi_2\colon x - 2z - 2 = 0$

b) $\pi_1\colon x + 2y + 3z - 5 = 0$ i $\pi_2\colon x + 2y - 3z - 2 = 0$

c) $\pi_1\colon 2x + y + 5z = 0$ i $\pi_2\colon y - 2z - 10 = 0$

d) $\pi_1\colon 2x + 4y + 8z - 10 = 0$ i $\pi_2\colon 2x + 4y - 8z - 10 = 0$

5.6.2 Intersecció entre dues rectes

Exemple 92. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes $r\colon \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$ i $s\colon \{2x - 2y + 3z - 19 = 0, x - y + z - 4 = 0\}$.

Una de les maneres de trobar el punt d'intersecció entre ambdues rectes és resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{r} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \\ 2x - 2y + 3z - 19 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{array} \right\} .$$

Com es veu, resoldre'l pels mètodes habituals pot ser bastant engorrós (només els utilitzarem quan el sistema presenti un aspecte senzill). Per aquest motiu, passarem una de les rectes a la seva forma paramètrica i substituirem les seves equacions a les equacions de l'altra recta.

- Passam en primer lloc la recta r a la forma paramètrica:

$$r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 11 + 3\lambda \end{cases}$$

- Substituïm ara aquestes expressions a les equacions de s, i ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2(-\lambda) - 2(7+\lambda) + 3(11+3\lambda) - 19 = 0 \\ -\lambda - (7+\lambda) + (11+3\lambda) - 4 = 0 \end{array}\right\},$$

  la solució del qual és, per a cadascuna de les dues equacions, $\lambda = 0$. Notem la importància de què la solució sigui la mateixa a les dues equacions. En cas contrari, el sistema seria incompatible i, per tant, no tendria solució.

- Substituïm ara aquest valor de λ a les equacions de la recta r i en queda

$$r : \begin{cases} x = -0 \\ y = 7 + 0 \\ z = 11 + 3{\cdot}0 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \\ z = 11 \end{cases}$$

  El punt d'intersecció és, aleshores, $A(0, 7, 11)$.

Exemple 93. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes $r\colon \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$ i $s\colon \{2x - 2y + 3z = 0, x - y + z - 4 = 0\}$.

- Passam la recta r a la forma paramètrica:

$$r : \{x = -\lambda, y = 7 + \lambda, z = 11 + 3\lambda\}$$

- Substituïm aquestes expressions a les equacions de s, i ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2(-\lambda) - 2(7+\lambda) + 3(11+3\lambda) = 0 \\ -\lambda - (7+\lambda) + (11+3\lambda) - 4 = 0 \end{array}\right\},$$

  la solució del qual és, per a la primera de les equacions, $\lambda = 19/5$, i $\lambda = 0$ per a la segona. Per tant, el sistema no té solució, del que deduïm que les dues rectes no tenen punts en comú: o bé es creuen o bé són paral · leles. Per saber quina de les dues possibilitats és la bona, mirarem si els seus vectors directors són paral · lels o no:

$$\overrightarrow{d_r} = (-1,1,3), \quad \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (1,1,0)$$

Aleshores:

$$\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{3}{0} \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \text{ i } \overrightarrow{d_s} \text{ no són paral} \cdot \text{lels}$$

- Per tant, com les rectes no s'intersequen i no tenen la mateixa direcció. Llavors es creuen.

Exercici 142. Calculeu el punt d'intersecció entre aquestes rectes:

a) $r\colon \{x+2y+3z+1=0, x-y+z=0\}$ i $s\colon \{2x+y+4z+1=0, x-y+z+3=0\}$

b) $r\colon \{x-2y+z+3=0, 2x-y+z-4=0\}$ i $s\colon \{3x-3y+2z-1=0, x+y-7=0\}$

c) $s\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ i $s\colon \{2x-6y+z-1=0, x-z+3=0\}$

5.6.3 Punt d'intersecció entre una recta i un pla

Exemple 94. Calculeu el punt d'intersecció entre la recta

$$r\colon \{x-2y+z+3=0, 2x-y+z-4=0\}$$

i el pla $\pi : 3x-y+2z-1=0$.

- El punt d'intersecció que cercam és la solució del sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z+3=0 \\ 2x-y+z-4=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{array}\right\}$$

Una altra manera de trobar-lo és resoldre el sistema passant la recta a la forma paramètrica en primer lloc; queda, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x=-\lambda \\ y=7+\lambda \\ z=11+3\lambda \\ 3x-y+2z-1=0 \end{array}\right\}$$

- Substituint:

$$3(-\lambda)-(7+\lambda)+2(11+3\lambda)-1=0; \quad 2\lambda+14=0; \quad \lambda=-7$$

Llavors el punt d'intersecció és

$$\left.\begin{array}{l} x=-(-7)=7 \\ y=7+(-7)=0 \\ z=11+3(-7)=-10 \end{array}\right\} = (7,0,-10)$$

Exercici 143. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes i plans següents:

a) $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+2}{5}$ i $\pi\colon 3x - y + 2z - 1 = 0$

b) $r : \{x + 2y + 3z - 1 = 0, y - z - 3 = 0\}$ i $\pi\colon x - y + 2z - 1 = 0$

c) $r : \{x + 2y + 3z - 1 = 0, y - z - 3 = 0\}$ i $\pi\colon x + 2y + 3z + 3 = 0$

5.7 Exercicis proposats

5.7.1 Vectors

Exercici 144. Quins dels vectors següents tenen la mateixa direcció?

$$\vec{a}\,(1, -3, 2)\,, \quad \vec{b}\,(2, 0, 1)\,, \quad \vec{c}\,(-2, 6, -4)\,, \quad \vec{d}\,(5, -15, 10)\,, \quad \vec{e}\,(10, -30, 5)$$

Exercici 145. Donats els vectors $\vec{a}\,(1, -3, 2)$ i $\vec{b}\,(2, 0, 1)$, calculeu:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $|\vec{a}|$ i $\left|\vec{b}\right|$

c) l'angle que formen entre si $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

Exercici 146. Donats $\vec{a} = \vec{i} + m\overrightarrow{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + m\overrightarrow{k}$, calculeu m per a què els vectors siguin:

a) paral · lels,

b) ortogonals.

Exercici 147. Calculeu l'angle que formen entre si els vectors $\vec{a}\,(1, 2, 3)$ i $\vec{b}\,(2, -2, 1)$.

Exercici 148. Calculeu m per a què el vector $\vec{a}\,(1, 3, m)$ sigui ortogonal al vector $\vec{b}\,(1, -2, 3)$.

Exercici 149. Calculeu l'àrea del paral · lelogram que formen els vectors $\vec{a}\,(1, -3, 2)$ i $\vec{b}\,(2, 0, 1)$.

Exercici 150. Trobeu un vector perpendicular a $\vec{u}\,(2, 3, 1)$ i a $\vec{v}\,(-1, 3, 0)$ i que sigui unitari.

Exercici 151. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ i $\vec{v}(2, 0, 1)$ i el mòdul del qual sigui $\sqrt{24}$.

Exercici 152. Calculeu $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, amb $\vec{u}\,(1, -1, 0)$, $\vec{v}\,(2, 0, 1)$ i $\vec{w}\,(2, 0, -2)$.

Exercici 153. Calculeu el volum del paral · lelepípede determinat pels vectors $\vec{u}\,(1, -1, 0)$, $\vec{v}\,(2, 0, 1)$ i $\vec{w}\,(2, 0, -2)$.

Exercici 154. Calculeu el valor de m perquè $\vec{u}\,(2, -3, 1)$, $\vec{v}\,(1, m, 3)$ i $\vec{w}\,(-4, 5, -1)$ siguin coplanaris.

Exercici 155. Donat el vector $\vec{v}\,(-2,2,-4)$, trobeu les coordenades dels vectors següents:

a) unitari i de la mateixa direcció que $\vec{v}$

b) paral · lel a $\vec{v}$ i de mòdul 6.

Exercici 156. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}\,(2,3,-1)$ i a $\vec{v}\,(1,4,2)$ la tercera component del qual sigui 1.

Exercici 157. Calcula les coordenades d'un vector $\vec{u}$ que sigui ortogonal a $\vec{v}\,(1,2,3)$ i $\vec{w}\,(1,-1,1)$ i tal que $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=19$.

5.7.2 Punts

Exercici 158. Comproveu si els punts $A\,(1,-2,1)$, $B\,(2,3,0)$ i $C\,(-1,0,-4)$ estan alineats o no.

Exercici 159. Trobeu el punt simètric del punt $A\,(-2,3,0)$ respecte del punt $M\,(1,-1,2)$.

Exercici 160. Calculeu a i b per a què els punts $A\,(1,2,-1)$, $B\,(3,0,-2)$ i $C\,(4,a,b)$ estiguin alineats.

5.7.3 Rectes i plans

Exercici 161. Associeu els conceptes de punt, vector, recta i pla a l'espai amb qualcuna o qualcunes de les expresions següents:

$$\overrightarrow{A}\,(2,-3,1)\,,\qquad \left\{\begin{array}{c} x+y=2\\ y+z=3\end{array}\right.\,,\qquad \left\{\begin{array}{c} x=-2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=3\end{array}\right.\,,$$

$$A\,(2,-3,1)\,,\qquad x+y=2,\qquad \left\{\begin{array}{c} x=-2\lambda+\mu\\ y=2+\lambda\\ z=3\end{array}\right.\,,$$

$$\left\{\begin{array}{c} x=2\\ y=3\end{array}\right.\,,\qquad \tfrac{x-1}{0}=y+3=\tfrac{z}{-6}$$

Exercici 162. Escriviu les equacions de la recta r que passa pels punts $A\,(-3,2,1)$ i $B\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

Exercici 163. Trobeu les equacions de la recta que passa pel punt $A\,(-4,2,5)$ i és paral · lela a l'eix OZ.

Exercici 164. Comproveu si els punts $A\,(1,-2,1)$, $B\,(2,3,0)$, $C\,(-1,0,-4)$ i $D\,(4,0,-5)$ es troben en un mateix pla o no.

Exercici 165. Trobeu les equacions paramètrica i contínua la recta

$$\left.\begin{array}{rcl} -x++3y-z+10 &=& 0\\ 2x+y-z-6 &=& 0\end{array}\right\}$$

5.7.4 Posició relativa de rectes

Exercici 166. Estudieu la posició relativa de les rectes següents, i trobeu el seu punt de tall quan sigui possible:

a) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4}$ i $s : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$

b) $r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ i $s : \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$

c) $r : \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{3}$ i $s : \{x - 2y - 1 = 0, 3y - z + 1 = 0\}$

d) $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ i $s : \{x = 3 + 4\lambda, y = 3 + 6\lambda, z = 4 + 8\lambda\}$

Exercici 167. Calculeu el valor de a per a què les rectes r i s es tallin, i trobeu el seu punt de tall:

$$\begin{aligned} r &: \; x = y = z - a \\ s &: \; \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0} \end{aligned}$$

Exercici 168. Calculeu els valors de m i n per a què les rectes r i s siguin paral · leles:

$$r : \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} , \quad s : \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

5.7.5 Plans

Exercici 169. Calculeu les equacions dels plans següents:

a) passa pel punt $P\,(2, -3, 1)$ i el vector normal del qual és $\vec{n}\,(5, -3, -4)$

b) perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ i que passa pel punt $(1, 0, 1)$

Exercici 170. Calculeu m i n per a què els plans $\alpha\colon mx + y - 3z - 1 = 0$ i $\beta\colon 2x + ny - z - 3 = 0$ siguin paral · lels. Poden ser coincidents?

Exercici 171. Determineu l'equació del pla que conté el punt $P\,(2, 1, 2)$ i la recta $x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$.

Exercici 172. Comproveu que les rectes $r : \frac{x-1}{2} = y = z - 2$ i

$$s : \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

són paral · leles, i troba l'equació del pla que les conté.

Exercici 173. Determineu el valor de a per a què les rectes r i s siguin coplanàries:

$$r : x = y - a = \frac{z}{0}, \; s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Trobeu l'equació del pla que les conté.

Exercici 174. Estudieu la posició relativa de la recta $r : \frac{x-3}{2} = y + 1 = \frac{z}{-1}$ i el pla $\pi : x - y + z - 3 = 0$.

Exercici 175. Trobeu l'equació del pla que passa pels punts $A\,(1, 3, 2)$ i $B\,(-2, 5, 0)$ i és paral · lel a la recta

$$r : \{x = 3 - \lambda, \; y = 2 + \lambda, \; z = -2 - 3\lambda\}$$

Exercici 176. Trobeu l'equació del pla que conté la recta

$$r : \{x = 2 + 3\lambda, \; y = -1 - \lambda, \; z = \lambda\}$$

i és paral · lel a $s : \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$.

Exercici 177. Calculeu el valor de m per a què els punts $A\,(m, 0, 1)$, $B\,(0, 1, 2)$, $C\,(1, 2, 3)$ i $D\,(7, 2, 1)$ estiguin en un mateix pla. Quina és l'equació d'aquest pla?

Exercici 178. Donat el pla $\pi\colon 2x - 3y + z = 0$ i la recta $r\colon x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, trobeu l'equació del pla que conté la recta r i és perpendicular al pla π.

Exercici 179. Escriviu l'equació del pla que passa pels punts $A\,(1, -3, 2)$ i $B\,(0, 1, 1)$ i és paral · lel a la recta

$$r : \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

Exercici 180. Estudieu la posició relativa de la recta $r : \{x = 3, y = 2\}$ i el pla $z = 1$.

Exercici 181. Estudieu les posicions relatives del pla $\pi\colon x + ay - z = 1$ i la recta

$$r : \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$

segons els valors de a.

Exercici 182. Trobeu la recta que passa pel punt $A = (1, 1, -1)$, és paral · lela al pla $\pi \equiv x - y + z = 5$ i talla a l'eix de coordenades OZ.

Exercici 183. Estudieu la posició relativa dels plans $\pi \equiv x + 3y - 2z = 7$, $\pi' \equiv x + 2t - az = 5$ i $\pi'' \equiv ax + z = b$, segons els valors d'a i de b. Quan es tallen en una recta? Quina d'elles és la que passa pel punt $(-1, 4, 2)$?

Exercici 184. Donats el punt $P = (2, 1, 2)$ i la recta resultant de la intersecció dels plans $4x - y = 12$ i $z - x = 2$, trobeu l'àrea del triangle determinat pel punt P, el punt de la recta més proper a P i el punt $Q = (1, 0, -1)$.

Exercici 185. Donada la recta de l'equació $\frac{x}{2} = 1 - y = \frac{2z+2}{6}$ i el pla π d'equació $x + 3y - 3z = -3$, trobeu:

a) El pla que conté a r i és perpendicular a π

b) El volum del tetraedre determinat per π i els plans coordenats

Exercici 186. Sigui un pla qualsevol $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$. Proveu que el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ és un vector perpendicular al pla π.

Exercici 187. Sigui π el pla d'equació $3x + 2y - z = 1$ i r la recta d'equacions $\begin{cases} 3x + 2y & = 0 \\ y - z & = 1 \end{cases}$. Estudieu si els punts $P = (1, 0, 0)$, $Q = (2, -3, -4)$, $R = (0, 1, 1)$ i $S = (0, 0, -1)$ pertanyen al pla π o a la recta r.

Exercici 188. Trobeu les posicions relatives entre aquests plans. En cas de que es tallin, trobeu l'equació contínua de la recta:

a) $\pi_1 \colon 3x + 3y + z - 1 = 0$ i $\pi_2 \colon x - -5y + 5z = 0$

b) $\pi_1 \colon x + 2y + z = 0$ i $\pi_2 \colon x + 2yz - 2 = 0$

c) $\pi_1 \colon 2x + 4y + z = 0$ i $\pi_2 \colon 10x + 20y + 5z + 2 = 0$

d) $\pi_1 \colon 2x + 8z - 10 = 0$ i $\pi_2 \colon 2x + 8y - 10 = 0$

5.7.6 Altres

Exercici 189. Estudieu la posició relativa de les rectes

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \quad \text{i } s : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -14 + 5\lambda \end{cases}$$

i trobeu l'angle que formen entre si.

Exercici 190. Trobeu, en cada cas, l'angle que formen la recta i el pla:

a) $r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2}$, $\pi \colon x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r : \{x = \lambda, y = 1 + 2\lambda, z = -2\}$, $\pi \colon 2x - y + z = 0$

c) $r : \frac{x-1}{2} = y - 3 = z$ $\pi \colon x + z = 17$

Exercici 191. Calculeu l'angle que formen els plans $\alpha \colon z = 3$ i $\beta \colon x - y + 2z + 4 = 0$.

5.8 Exercicis resolts de geometria de l'espai

Exemple 95. Trobeu un punt qualsevol de la recta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

i calculeu el seu vector director.

Solució. Qualsevol punt de la recta ha de complir les equacions que la defineixen. Per a trobar-ne un, donem un valor qualsevol a les variables. Per exemple $y = 0$ i substituiguem aquest valor en les equacions de la recta:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2{\cdot}0 + z + 3 = 0 \\ 2x - 0 + z - 4 = 0 \end{array}\right\}; \qquad \left.\begin{array}{r} x + z + 3 = 0 \\ 2x + z - 4 = 0 \end{array}\right\}$$

Les solucions d'aquest sistema són $x = 7$, $z = -10$, per la qual cosa el punt que cercam és

$$(7, 0, -10)$$

El vector director de la recta és

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d} &= \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = (1, -2, 1) \wedge (2, -1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1, 1, 3) \end{aligned}$$

■

Exemple 96. Trobeu un punt qualsevol del pla $\pi\colon -x + 5y + 2z - 1 = 0$ i un vector perpendicular a ell.

Solució. Un punt qualsevol del pla ha de satisfer la seva equació. Per tant, donem valors qualssevol a les variables, per exemple $y = 0$ i $z = 0$, i substituiguem aquests valors a l'equació del pla:

$$-x + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0; -x - 1 = 0; x = -1$$

Per tant, un punt del pla és

$$(-1, 0, 0)$$

Un vector perpendicular al pla és el seu vector normal: $\overrightarrow{n} = (-1, 5, 2)$. ■

Exemple 97. Passeu a forma paramètrica la recta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Solució. Per poder escriure una recta en forma paramètrica necessitem un vector director d'ella i un punt qualsevol del seus punts.

Calculem el vector director de la recta:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{d} &= \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = (1,-2,1) \wedge (2,-1,1) = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\
&= (-1,1,3)
\end{aligned}$$

Cerquem ara un punt de la recta. Aquest punt ha de complir les equacions $x - 2y + z + 3 = 0$ i $2x - y + z - 4 = 0$. Facem, per exemple, $x = 0$. Aleshores, substituint aquest valor a les dues equacions anteriors queda el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} -2y + z &= -3 \\ -y + z &= 4 \end{aligned} \right\},$$

la solució del qual és $y = 7, z = 11$. Així, un punt de la recta és $A(0,7,11)$.

L'equació en forma paramètrica és, aleshores

$$r : \left\{ \begin{aligned} x &= 0 + (-1)\lambda \\ y &= 7 + 1\lambda \\ z &= 11 + 3\lambda \end{aligned} \right. = \left\{ \begin{aligned} x &= -\lambda \\ y &= 7 + \lambda \\ z &= 11 + 3\lambda \end{aligned} \right.$$

■

5.9 Recull de fórmules de geometria de l'espai

1. La suma de dos vectors $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ i $\overrightarrow{w}(a',b',c')$:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = (a,b,c) + (a',b',c') = \left(a + a', b + b', c + c'\right)$$

2. La diferència de dos vectors, $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ i $\overrightarrow{w}(a',b',c')$:

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = (a,b,c) - (a',b',c') = \left(a - a', b - b', c - c'\right)$$

3. El producte d'un nombre k per un vector $\overrightarrow{u}(a,b,c)$:

$$k \cdot \overrightarrow{u} = k \cdot (a,b,c) = (ka, kb, kc)$$

4. Els components del vector d'origen en el punt $P(x_1, y_1, z_1)$ i extrem en el punt $Q(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

5. El mòdul del vector $\overrightarrow{u}(a, b, c)$:

$$|\overrightarrow{u}| = |(a, b, c)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

6. El producte escalar de dos vectors, $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ i $\overrightarrow{w}(a', b', c')$, en una base ortonormal:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = (a, b, c) \cdot (a', b', c') = aa' + bb' + cc'$$

D'altra banda, es cumpleix que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \cos \alpha$$

on α és l'angle que formen $\vec{u}$ i $\vec{w}$.

7. El producte vectorial de dos vectors, $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ i $\overrightarrow{w}(a', b', c')$, en una base ortonormal:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} &= (a, b, c) \wedge (a', b', c') \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

A més,

$$|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \sin \alpha$$

on α és l'angle que formen $\vec{u}$ i $\vec{w}$.

8. El producte mixt de tres vectors:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$$

També es pot calcular amb la fórmula

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

9. El valor absolut de $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ dóna el volum del paral · lelepípede definit pel vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, i $\overrightarrow{w}$, és a dir:

$$V = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$$

10. El volum del tetraedre format pel vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ és igual a

$$V = \frac{1}{6}\,|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

11. El punt mitjà del segment definit pels punts $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$:

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

12. L'equació paramètrica d'una recta:

$$r\colon \begin{cases} x = x_1 + \lambda d_x \\ y = y_1 + \lambda d_y \\ z = z_1 + \lambda d_z \end{cases},$$

on $P(x_1, y_1, z_1)$ és qualsevol punt de la recta i $\vec{d_r}(d_x, d_y, d_z)$ és el vector director de la recta.

13. L'equació en forma contínua d'una recta:

$$r\colon \frac{x - x_1}{d_x} = \frac{y - y_1}{d_y} = \frac{z - z_1}{d_z},$$

on $P(x_1, y_1, z_1)$ és qualsevol punt de la recta i $\vec{d_r}(d_x, d_y, d_z)$ és el vector director de la recta.

14. L'equació paramètrica d'un pla:

$$\pi : \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_1 + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_1 + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases},$$

on $P(x_1, y_1, z_1)$ és qualsevol punt del pla i $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ i $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ són vectors paral · lels al pla i que no són paral · lels entre si.

15. L'equació implícita d'un pla es pot trobar amb

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & u_x & v_x \\ y - y_1 & u_y & v_y \\ z - z_1 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0,$$

on $P(x_1, y_1, z_1)$ és qualsevol punt del pla i $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ són vectors paral · lels al pla i que no són paral · lels entre si.

16. L'equació implícita d'un pla és de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on $\vec{n}(A, B, C)$ és un vector perpendicular al propi pla, que s'anomena vector normal del pla.

17. El vector director d'una recta expressada com la intersecció de dos plans, és a dir, expressada de la forma

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' & = & 0 \end{array} \right.$$

és igual a

$$\overrightarrow{d_r} = (A, B, C) \wedge (A', B', C') =$$

$$= \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \right)$$

18. Un vector perpendicular al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ és el vector

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

19. L'angle entre dues rectes, r i s:

$$\alpha = \arccos \frac{\left| \overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s} \right|}{\left| \overrightarrow{d_r} \right| \cdot \left| \overrightarrow{d_s} \right|},$$

on $\overrightarrow{d_r}$ i $\overrightarrow{d_s}$ són els vectors directors de cadascuna de les rectes.

20. L'angle entre dos plans, π_1 i π_2:

$$\alpha = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{n_{\pi_2}}|}{|\overrightarrow{n_{\pi_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_{\pi_2}}|},$$

on $\overrightarrow{n_{\pi_1}}$ i $\overrightarrow{n_{\pi_2}}$ són els vectors normals a cadascun dels plans.

21. L'angle entre una recta i un pla:

$$\alpha = \arcsin \frac{\left| \overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} \right|}{\left| \overrightarrow{d_r} \right| \cdot |\overrightarrow{n_\pi}|},$$

on $\overrightarrow{d_r}$ és el vector director de la recta i $\overrightarrow{n_\pi}$ és el vector normal al pla.

22. Per calcular els productes escalars o l'angle que formen plans i rectes, convé tenir present la taula següent (Taula 5.1).

	0 rad	$\pi/6$ rad	$\pi/4$ rad	$\pi/3$ rad	$\pi/2$ rad	π rad	$3\pi/2$ rad
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$

Taula 5.1: Valors dels sinus, cosinus i tangent pels angles més usuals

Part III

Probabilitat

6

Experiències aleatòries

En aquest capítol ens ocuparem de les definicions, més o menys formals, que permeten definir el concepte de probabilitat.

Definició 49 (experiència). Una *experiència* o *experiment* és qualsevol procediment, pràctica o simplement aconteixement en el que les regles de joc, és a dir, com s'ha de realitzar aquest, estan clares des d'un principi i en el que es mesura cert resultat final.

En principi existeixen variables rellevants a l'experiment i altres de negligibles.

Exemple 98. Exemples d'experiments serien:

a) Llançar una moneda i mirar-ne el resultat

En aquest experiment les variables rellevants serien, per exemple, la distribució de pesos de les cares, la forma de la moneda i el mètode de tir.

b) Accelerar un vehicle fins a una velocitat concreta i després frenar bruscament i mirar la distància recorreguda

En aquest experiment les variables rellevants seiren la velocitat just abans de frenar, el pes del vehicle, la pendent del terreny i la força de fregament.

c) Comptar la freqüència absoluta dels colors dels cotxes en un aparcament per a determinar el color més freqüent.

En aquest darrer experiment, les variables rellevants serien, per exemple, el nombre de cotxes de cada tipus de color a l'aparcament.

Definició 50 (experiment determinista). Un *experiment determinista* és aquell experiment la repetició del qual produeix idèntics resultats, és a dir, per al mateix valor de les variables rellevants, s'obté el mateix resultat[1]. Per tant, el resultat de l'experiment es pot conèixer abans de dur-lo a terme una vegada estudiat aquest prèviament.

Definició 51 (experiment aleatori). Un *experiment aleatori* és aquell experiment que es caracteritza per la imprevisibilitat del seu desenllaç, a pesar de què s'executi sempre amb les mateixes condicions. En general, depèn de l'atzar.

Els experiments aleatoris tenen les característiques següents:

- En la realització de cada repetició, el seu resultat pot diferir
- Si repetim les proves calculant les seves freqüències relatives[2] de cadascun dels resultats possibles, llavors aquestes freqüències tendeixen a estabilitzar-se cap a un nombre fix, que és el que anomenarem *probabilitat*

Exemple 99. En l'exemple anterior, exemple 98, el llançament de la moneda seria un experiment aleatori, l'experiment de la frenada del vehicle seria un experiment determinista i l'experiment dels colors dels vehicles es consideraria un experiment aleatori.

En aquesta part ens ocuparem dels experiments aleatoris.

6.1 Espai mostral i esdeveniments

Definició 52 (espai mostral). S'anomena *espai mostral* al conjunt de tots els possibles resultats d'un experiment aleatori. Es sol designar per E o per Ω.

Exemple 100. Si llançam un dau, l'espai mostral és $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si llançam una moneda, l'espai mostral és $E = \{C, X\}$ (hem obviat que ens pugui sortir cantó).

Exemple 101. En l'experiment corresponent a extreure una bolla d'una urna amb tres bolles vermelles (V), dues de blaves (B) i 4 de negres (N), l'espai mostral és $E = \{V, B, N\}$.

[1] Tècnicament, si les condicions inicials són les mateixes, les condicions finals també ho són.

[2] Recordem que la freqüència relativa no és res més que la divisió entre el nombre de vegades que apareix un resultat dividit pel nombre total de proves. És el tant per u d'aparició.

Hi ha exemples d'espais mostrals més complicats.

Exemple 102. Si llançam dues monedes l'espai mostral és

$$E = \{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

Recordem que la notació (a, b) denota un parell ordenat. Per tant, el resultat (C, X) no és el mateix que el resultat (X, C). En el primer cas, voldria dir que la moneda és cara i el segona moneda ha donat creu. El segon cas és totalment el contrari.

Si no tenguéssim en compte l'ordre, és a dir, si per a nosaltres les monedes fossin indistingibles[3], llavors l'espai mostral seria

$$E = \{CC, CX, XX\}$$

De forma intuïtiva està clar que la probabilitat de CX en el segon cas seria major que la probabilitat de (C, X) en el primer, ja que *compta doble*. Per tant, hem d'anar molt alerta de si prenem els resultats amb ordre o no.

Exemple 103. Si llançéssim dos daus, l'espai mostral seria

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\}$$

Exemple 104. En l'experiment consistent en llançar una moneda i posteriorment un dau, l'espai mostral és

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} (C,1), & (C,2), & (C,3), & (C,4), & (C,5), & (C,6), \\ (X,1), & (X,2), & (X,3), & (X,4), & (X,5), & (X,6) \end{array} \right\}$$

Notem que si l'experiment consistís en tirar primer el dau i després la moneda, llavors l'espai mostral seria:

Si no s'especifica l'ordre amb el qual llancem les coses, l'ordre amb el qual escrivim els resultats no té importància, però una vegada decidit s'ha de mantenir al llarg de tot l'exercici.

Exercici 192. Escriviu l'espai mostral corresponent als experiments següents:

a) Un dau de quatre cares

b) Tres monedes

Definició 53 (esdeveniment). S'anomena *esdeveniment* (o *succés*) a qualsevol subconjunt de E.

[3] Ho sigui si només *comptéssim* el nombre de cares i el nombre de creus.

Exemple 105. *a*) En l'experiment aleatori del llançament d'una moneda, tenim que els seus esdeveniments són: $\{C, X\}$, $\{C\}$, $\{X\}$ i $\emptyset$. $\emptyset$ denota el *conjunt buit*, el qual no té cap element.

b) Els esdeveniments de l'experiment consistent en llançar un dau serien $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{1,2\}$, ..., $\{1,2,3\}$, ..., $\{3,5,6\}$, ..., $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Exercici 193. Escriviu tots els possibles esdeveniments corresponents als experiments següents:

a) Llançar un dau de 4 cares

b) Llançar dues monedes (exemple 102)

c) Extreure una bolla d'una urna de l'exemple 101

Exercici 194. Escriviu quatre esdeveniments corresponents als experiments:

a) Llançar dos daus (exemple 103)

b) Llançar una moneda i un dau (exemple 104)

Proposició 27. *En un experiment aleatori, si el seu espai mostral E és finit i té n elements, llavors hi ha 2^n possibles esdeveniments.*

Definició 54 (esdeveniment elemental). Un *esdeveniment elemental* és qualsevol esdeveniment que té un sol element. En cas contrari, quan l'esdeveniment tengui més d'un element, es diu *esdeveniment compost*.

Exemple 106. Referint-nos al llançament d'un dau de sis cares, els seus esdeveniments elementals són $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Esdeveniments compostos són, per exemple $\{2,3,6\}$ i $\{1,5\}$ o el mateix E.

En el llançament d'una moneda, els seus esdeveniments elementals són $\{C\}$ i $\{X\}$ i els seus esdeveniments compostos són $\{C, X\}$.

Definició 55 (esdeveniment impossible). S'anomena *esdeveniment impossible* a aquell esdeveniment que mai pot ocórrer. És el conjunt buit, $\emptyset$.

Definició 56 (esdeveniment segur). S'anomena *esdeveniment segur* al que sempre es verifica. Correspon a l'espai mostral, E.

Exemple 107. En el llançament de dues monedes l'esdeveniment segur és

$$\{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

Exercici 195. Trobeu els esdeveniments segurs i impossibles dels exercicis exercici 193 i exercici 194.

6.2 Operacions amb esdeveniments

Definició 57 (unió d'esdeveniments). La *unió* de dos esdeveniments, A i B, és aquell esdeveniment, denotat per $A \cup B$, format per cada element que hi ha en A o en B.

Col · loquialment, la unió de dos esdeveniments és aquell esdeveniment que ocorre quan ocorre, al menys, un dels dos. De la definició és veu que $A \cup B$ és el mateix que $B \cup A$.

Gràficament, aquest concepte es pot representar mitjançant un *diagrama de Venn* (Figura 6.1a):

Definició 58 (intersecció d'esdeveniments). La *intersecció* de dos esdeveniments, A i B, és aquell esdeveniment, denotat per $A \cap B$, format per aquells elements que estan simultàniament a A i a B. Dos esdeveniments són *incompatibles* si la seva intersecció és el conjunt buit. En cas contrari, es diu que són *compatibles*.

De manera informal, l'esdeveniment intersecció de dos esdeveniment és aquell que ocorre quan ocorren ambdós. De la definició es veu que $A \cap B$ és el mateix que $B \cap A$ (Figura 6.1b).

Definició 59 (esdeveniment contrari). Donat un esdeveniment A, el seu *esdeveniment contrari* o *complementari*, que es denota per A^c o $\overline{A}$, és l'esdeveniment format per tots els elements de l'espai mostral que no són de A. És a dir, l'esdeveniment contrari de A es verifica quan no ocorre A (Figura 6.1d.

Definició 60 (diferència d'esdeveniments). Donats dos esdeveniments, A i B, la *diferència* entre A i B, que es denota per $A \setminus B$ (o $A - B$), és l'esdeveniment format pels elements de A que no estan en B (Figura 6.1c).

Exemple 108. En l'experiment de llançar un dau i mirar el resultat, tenim que $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si agafam $A =$ que surti parell i $B =$ que surti un nombre menor que 5, tenim que:

- $A \cup B =$ que surti parell o menor que $5 = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Per tant, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

- $A \cap B =$ que surti parell i menor que $5 = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$. Per tant, $A \cap B = \{2, 4\}$.

- $A \setminus B = \{6\}$

- $B \setminus A = \{1, 2\}$

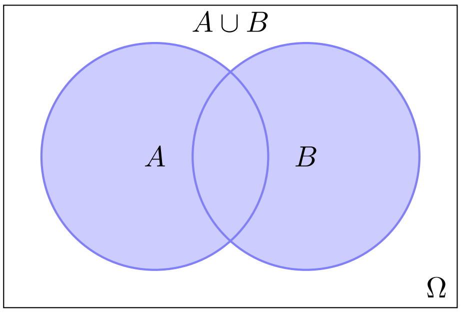
- $A^c =$ el contrari de què surti parell $= \{1, 3, 5\}$

- $B^c =$ el contrari de què surti un nombre menor que $5 = \{5, 6\}$

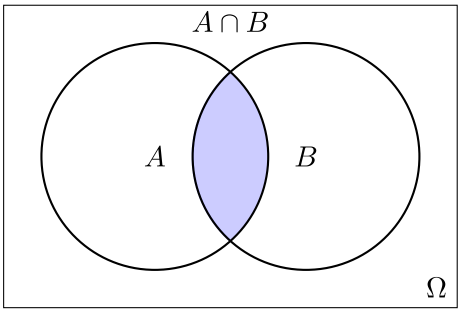
6.2.1 Propietats de les operacions

Les operacions sobre el conjunt d'esdeveniments anteriorment descrites satisfan certes propietats. Si A, B i C són esdeveniments qualssevol i E denota l'espai mostral, aleshores:

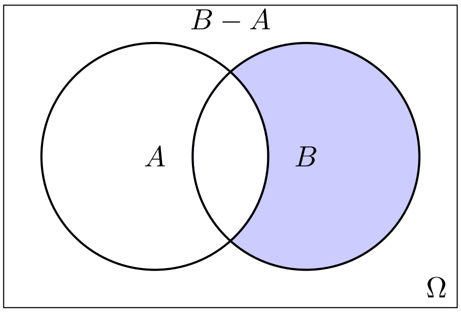
a) $A \cup E = E$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A^c = E$



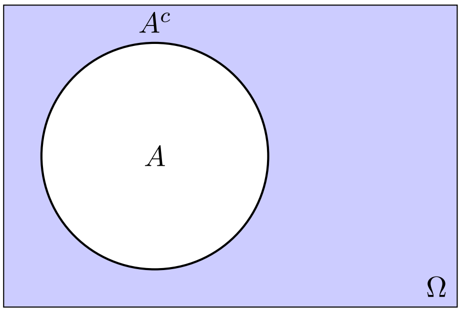
(a) Unió de dos esdeveniments



(b) Intersecció de dos esdeveniments



(c) Diferència de dos esdeveniments



(d) Complementari d'un esdeveniment

Figura 6.1: Operacions entre esdeveniments representats mitjançant diagrames de Venn *b*) $A \cap E = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A^c = \emptyset$

c) $A \setminus B = A \cap B^c$

d) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$

e) Idempotència: $(A^c)^c = A$

f) Commutatives:

(a) $A \cup B = B \cup A$
(b) $A \cap B = B \cap A$

g) Associatives:

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

h) Distributives:

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

En particular:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

i) *Lleis de De Morgan*

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Observació 20. Les més importants són les propietats distributives i les lleis de de Morgan.

Exercici 196. Es disposa d'una urna amb bolles numerades de l'1 al 16, de la qual s'extreu una bolla. Considerem els esdeveniments següents:

a) $A =$ treure un 7

b) $B =$ treure un nombre menor que 7

c) $C =$ treure un nombre parell

d) $D =$ treure un múltiple de 3

Calculeu *a*) Ω, *b*) $A \cap B$, *c*) $A \cup B$, *d*) $B \cap C$, *e*) $C \cap D$, *f*) $C \cup D$, *g*) B^c, *h*) $A \setminus B$, $B \setminus A$. Existeixen esdeveniments incompatible entre si?

Exercici 197. Es llança una ruleta de 10 costats, numerats de la següent manera: 2, 4, 6, 8, ..., 20, i s'observa el resultat obtingut.

a) Trobeu l'espai mostral.

b) Escriviu com a conjunts els esdeveniments següents:

(a) A = "obtenir un nombre parell"
(b) B = "obtenir un nombre senar"
(c) C = "obtenir un múltiple de 3"
(d) D = "obtenir un múltiple de 5"
(e) E = "obtenir un nombre major que 4"
(f) F = "obtenir un nombre menor que 6"
(g) G = "obtenir un múltiple de 3 i 4"

c) Calculeu els seus esdeveniments contraris.

d) Trobeu la unió, la intersecció i la diferència d'A amb cadascun dels altres esdeveniments.

e) Assenyaleu un parell d'esdeveniments incompatibles entre si. Justifiqueu la resposta.

Exercici 198. Aplicant les propietats anteriors, demostreu que:

a) $A \cap (A \cap B) = A \cap B$

b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

c) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

d) $(A^c \cap B) \cup A = A \cup B$

e) $(A \cup B^c) \cap B = A \cap B$

f) $((A \setminus B) \cup (B \setminus A))^c = A \cap B$

Exemple 109. D'entre els habitants d'un poble es tria una persona a l'atzar. Considerem els esdeveniments següents: A = ser soci del casino, B = ser soci del club de futbol local i C ser soci d'alguna associació juvenil.

a) Expresseu en funció de A, B i C les situacions següents:

(a) "ser soci d'alguna d'aquestes associacions": $A \cup B \cup C$
(b) "ser soci de les tres associacions": $A \cap B \cap C$
(c) "ser soci només del casino": $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
(d) "ser soci de, com a màxim, una o dues associacions: $A \cup B \cup C - (A \cap B \cap C)$
(e) "no ser soci de cap de les associacions": $\overline{(A \cap B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
(f) "ser soci d'una sola associació": $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

b) Expresseu el significat dels esdeveniments següents:

(a) $A \cup B \cup C$: "pertànyer a, almenys, ua associació"

(b) $\overline{(A \cup B \cup C)}$: "no ser soci de cap associació"

(c) $A \cup B - C$: "no ser soci de juvenil però sí d'alguna de les altres dues"

(d) $\overline{(A \cap B \cap C)}$: "no ser soci de les tres alhora"

(e) $C - (A \cup B)$: "ser soci, només, de l'associació juvenil"

(f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$: "ser soci de, almenys, dues associacions"

Per ajudar-nos a resoldre cadascun dels apartats, hem fet servir el diagrama de Venn de tres esdeveniments (Figura 6.2).

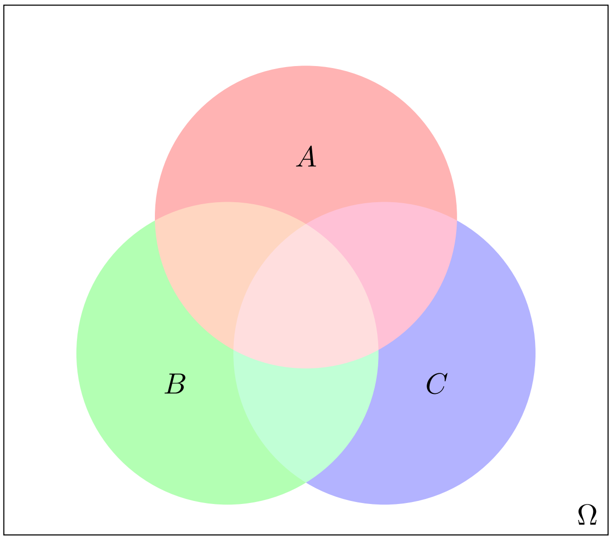


Figura 6.2: Diagrama de Venn de tres esdeveniments

Exercici 199. Siguin els esdeveniments següents: $A =$ "plou avui", $B =$ "plou demà" i $C =$ "plou passat-demà". Expresseu mitjançant operacions entre esdeveniments:

a) Plou un dels tres dies, almenys

b) Plou avui però no demà ni passat-demà

c) No plou cap dels tres dies

d) Plou com a màxim dos d'aquests tres dies

e) Plou avui però no demà

Expliqueu el significat de

a) $(A \cap B) - C$

b) $(A \cup B) - C$

c) $A \cup B \cup \overline{C}$

d) $(A \cap B) \cup (C \cap A)$

e) $\overline{A \cup B}$

Exercici 200. Considerem els esdeveniments “ser oient de RNE”, “set oient de la SER”, “ser oient de M80”. Expreseu, mitjançant operacions amb esdeveniments, els esdeveniments següents: *a*) “ser oient de només dues emissores”, *b*) “ser oient de RNE però no de la SER ni de M80”, *c*) “ser oient de, almenys, una emissora”, *d*) ‘escoltar alguna emissora però no les tres”, *e*) “no escoltar més d’una emissora”

6.3 Probabilitat

La probabilitat és la mesura de la certesa de què ocorri un cert esdeveniment aleatori, és a dir, la probabilitat mesura la *facilitat* de què l’esdeveniment tengui lloc: a major probabilitat, majors són les possibilitats de què l’esdeveniment ocorri. A cada esdeveniment se li associa un nombre, de 0 a 1:

- Si la probabilitat d’un esdeveniment és 0, llavors és impossible que occorri dit esdeveniment
- Si la probabilitat és 1, llavors l’esdeveniment és segur que passarà, en qualsevol cas
- En els altres casos, el valor de la probabilitat indica el tant per u de possibilitats de què l’esdeveniment ocorri.

De manera més formal,

Definició 61 (probabilitat). La *probabilitat* és una aplicació que associa a cada esdeveniment A un nombre, $p(A)$, anomenat la probabilitat de A, que satisfà les propietats següents:

a) $p(A) \geq 0$ per a qualsevol esdeveniment A. És a dir, la probabilitat d’un esdeveniment qualsevol no pot ser negativa.

b) $p(E) = 1$. La probabilitat de l’esdeveniment segur és 1.

c) $p(\emptyset) = 0$. La probabilitat de l’esdeveniment impossible és 0.

d) Si A i B són esdeveniments incompatibles, llavors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.[4]

[4] La definició axiomàtica de la probabilitat s’escapa de l’abast d’aquest manual. Conceptes com el de σ-àlgebra i σ-additivitat són necessaris per introduir-la.

6.3.1 Propietats de la probabilitat

La definició anterior, té una sèrie de conseqüències: si A és un esdeveniment qualsevol, llavors:

a) $p(A^c) = 1 - p(A)$

b) Si A és un subconjunt de B, llavors $p(A) \leq p(B)$

c) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

d) *regla de Laplace* Si els esdeveniments elementals tenen tots la mateixa probabilitat, llavors

$$p(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables a } A}{\text{nombre de casos possibles}},$$

Exemple 110 (aplicació de la regla de Laplace). Una urna conté 5 bolles blanques, 7 bolles negres i 3 bolles verdes. Se n'extreu una a l'atzar. Quina és la probabilitat de què aquesta sigui negra?

Tenim que la probabilitat de treure una bolla concreta és la mateixa (les bolles no estan trucades), per tant podem aplicar la llei de Laplace:

$$p(\text{negra}) = \frac{\text{nombre de bolles negres}}{\text{nombre total de bolles}} = \frac{7}{15}$$

Exemple 111 (aplicació de la regla de Laplace). D'un joc de cartes espanyoles en triam una a l'atzar[5]. Quina és la probabilitat de què aquesta sigui una figura, és a dir un 10, un 11 o un 12?

Treure una carta és un esdeveniment equiprobable, per tant podem aplicar la llei de Laplace:

$$p(\text{figura}) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Exercici 201. En el llançament d'un dau, calculeu la probabilitat de què:

a) surti un cinc,

b) surti un nombre parell,

c) no surti un nombre parell,

d) surti múltiple de 3.

Exercici 202. A una oficina, un 30% del personal són homes. Es tria una persona a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què aquesta sigui una dona.

Exercici 203. En l'experiment consistent a treure una carta d'una baralla espanyola de 48 cartes, calculeu la probabilitat que sigui:

[5] A la baralla espanyola, hi ha 48 cartes: 12 cartes de bastos, 12 d'ors, 12 d'espases i 12 de copes. El 10 s'anomena *sota*, l'11 s'anomena *cavall* i el 12, *rei*.

a) Sota

b) Copa o oros

c) Copa i oros

d) Figura i espasa

e) Figura o espasa

f) Cavall o espasa

Exercici 204. En una bossa hi ha 5 bolles vermelles, 10 bolles negres i 5 bolles blaves. En treiem una i miram de quin color és. Calculeu la probabilitat de:

a) Treure una bolla vermella

b) Treure una bolla negra o blava

c) Treure una bolla que no sigui blava.

Exercici 205. En una bossa hi ha deu boles numerades de l'1 al 10. Si extraiem una bola de la bossa, calculeu la probabilitat de:

a) Treure un 7

b) Treure un nombre menor que 7

c) Treure un nombre no inferior 7

d) Treure un múltiple de 5

e) Treure un divisor de 6

f) Treure un nombre primer

Exercici 206. En una capsa hi ha vuit bolles numerades consecutivament com segueix: 2, 4, 6, ..., 16. Si diem A = "treure un nombre menor o igual que 10" i B = "treure un múltiple de 3". Calculeu la probabilitat de: *a*) A *b*) B *c*) A^c *d*) B^c *e*) $A \cup B$ *f*) $A \cap B$

Solució. Exercici 201 *a*) 1/6, *b*) 1/2, *c*) 1/2, *d*) 1/3, Exercici 202 0.3, Exercici 203 *a*) 4/48, *b*) 1/2, *c*) 0, *d*) 3/48, *e*) 21/48, *f*) 15/48, Exercici 204 *a*) 1/4, *b*) 3/4 *c*) 3/4, Exercici 205 *a*) 0.1, *b*) 0.6, *c*) 0.4, *d*) 0.2, *e*) 0.3, *f*) 0.4, Exercici 206 *a*) 0.625, *b*) 0.25, *c*) 0.375, *d*) 0.75, *e*) 0.75, *f*) 0.125 ■

Exercici 207. En el llançament de dos daus, trobeu la probabilitat de què *a*) ambdues cares sigui parells, *b*) la suma de les cares sigui 9

Exercici 208. Si sabem que la probabilitat dels esdeveniments A, B i $A \cap B$ és $p(A) = 1/3$, $p(B) = 2/5$ i $p(A \cap B) = 1/15$, trobeu les probabilitats de: *a*) que es compleixi algun dels esdeveniments A o B *b*) que no es compleixi A però sí B, *c*) que es compleixi, només, un esdeveniment *d*) que no es compleixi ni A ni B

Solució. *a*) 2/3, *b*) 1/3, *c*) 3/5, *d*) 1/3 ■

Exercici 209. En un banc hi ha dues alarmes, A i B. En cas d'atracament, la probabilitat de què s'activi A, B o ambdues és: $p(A) = 0,75$, $p(B) = 0,85$ i $p(A \cap B) = 0,65$. Trobeu la probabilitat de què: *a*) s'activi alguna de les dues *b*) s'activi només una *c*) no se n'activi cap

Exemple 112. Donats els esdeveniments A i B, i les probabilitats $p(A) = 0.1$, $p(B) = 0.2$ i $p(A \cup B) = 0.25$, calculeu *a*) $p(A^c)$ *b*) $p(A \cap B)$.

a) Tenim que $p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0.1 = 0.9$

b) Aplicant la probabilitat de la unió: $0.25 = 0.1 + 0.2 - p(A \cap B)$. Per tant, $p(A \cap B) = 0.1 + 0.2 - 0.25 = 0.05$.

Exercici 210. Determineu si són compatibles o incompatibles els esdeveniments A i B, sabent que $p(A) = 1/4$, $p(B) = 1/2$ i $p(A \cup B) = 2/3$.

Exercici 211. Dels esdeveniments A i B se sap que $p(A) = 2/5$, $p(B) = 1/3$ i $p(A^c \cap B^c) = 1/3$. Calculeu $p(A \cup B)$ i $p(A \cap B)$.

6.4 Probabilitat condicionada

En molts de casos, la probabilitat depèn d'un factor. Per exemple, la probabilitat de què una persona sigui calba és relativament baixa. Ara bé, la probabilitat de què un home sigui calb ja és, per desgràcia, més alta. Per tant, la probabilitat de ser calb depèn del sexe de les persones. D'aquesta manera podem calcular la probabilitat de ser calb o bé la probabilitat de ser calb condicionat a ser home. Això darrer vol dir que sabent que triam un home, quina és la probabilitat de què aquest sigui calb.

Definició 62 (probabilitat condicionada). Donats els esdeveniments A i B, per *probabilitat de A condicionat a B* entendrem la probabilitat de què es verifiqui l'esdeveniment A si prèviament s'ha verificat l'esdeveniment B. S'escriu $p\,(A \mid B)$ i es calcula com

$$p\,(A \mid B) = \frac{p\,(A \cap B)}{p\,(B)},$$

amb $p(B) \neq 0$.

6.4.1 Propietats de la probabilitat condicionada

Si A i B són esdeveniments qualssevol, llavors:

a) $p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$, si $p(A) \neq 0$.

b) $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A) = p(B) \cdot p(A \mid B)$

c) Dos esdeveniments són *independents* quan $p(A \mid B) = p(A)$. En aquest cas, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Proposició 28. *Si A i B són independents, llavors també ho són A^c i B^c*

Exemple 113 (probabilitat condicionada). En una bossa tenim:

- tres bolles verdes, numerades de l'1 al 3,
- quatre bolles vermelles, numerades del 4 al 7,
- una bolla negra, amb el nombre 8.

de la qual extraiem una bolla. Calculeu $p(\text{parell}|\text{verda})$, $p(\text{parell}|\text{vermella})$ i $p(\text{parell}|\text{negra})$.

Hem de calcular les probabilitats condicionades següents:

$$\begin{aligned}
p(\text{parell} \mid \text{verda}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{verda})}{p(\text{verda})} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} \\
p(\text{parell} \mid \text{vermella}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{vermella})}{p(\text{vermella})} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2} \\
p(\text{parell} \mid \text{negra}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{negra})}{p(\text{negra})} = \frac{1/8}{1/8} = 1
\end{aligned}$$

Exercici 212. D'un joc de cartes se'n treu una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què:

a) sigui un rei,

b) sigui una figura,

c) sigui el rei d'espases,

d) sigui un rei sabent que ha sortit una figura,

e) sigui una figura sabent que ha sortit un rei,

f) sigui el rei d'espases sabent que ha sortit una figura.

Exemple 114. A l'exemple anterior (exemple 113), els esdeveniments "parell" i "vermella" són independents, ja que

$$p(\text{parell} \mid \text{vermella}) = p(\text{parell}) = \frac{1}{2}$$

6.5 Experiments compostos: tècniques de resolució

Definició 63 (experiment compost). Un experiment es diu *compost* si està format per més d'una part, la qual dóna lloc a un resultat. Si l'experiment només té una part es diu *experiment simple*.

Exemple 115 (exemple d'experiments compostos). Exemple d'experiment compost és:

a) Tirar dos daus

b) Extreure dues (o més) bolles d'una urna, amb o sense reposició (la reposició és si tornam la bolla extreta a l'urna).

c) Extreure una bolla d'una urna i, segons el color de la bolla, extreure'n una altra d'una altra.

Existeixen diverses tècniques per a calcular les probabilitats dels experiments compostos, les quals de forma general podem emprar indistintament. El millor és veure'ls amb exemples.

6.5.1 Diagrama d'arbre

Exemple 116. A una casa hi ha tres clauers, A, B i C amb 5, 7 i 8 claus respectivament, de les quals només una de cada clauer obri la porta del rebost. Es tria un clauer a l'atzar i, d'aquest, una clau per intentar obrir el rebost.

a) Quina és la probabilitat d'obrir el rebost?

b) Quina és la probabilitat de què es triï el tercer clauer i la que la clau triada no obri el rebost?

c) Quina és la probabilitat de què s'hagi triat el clauer C sabent que s'ha obert el rebost?

Solució. En primer lloc, facem un *diagrama d'arbre* (Figura 6.3).

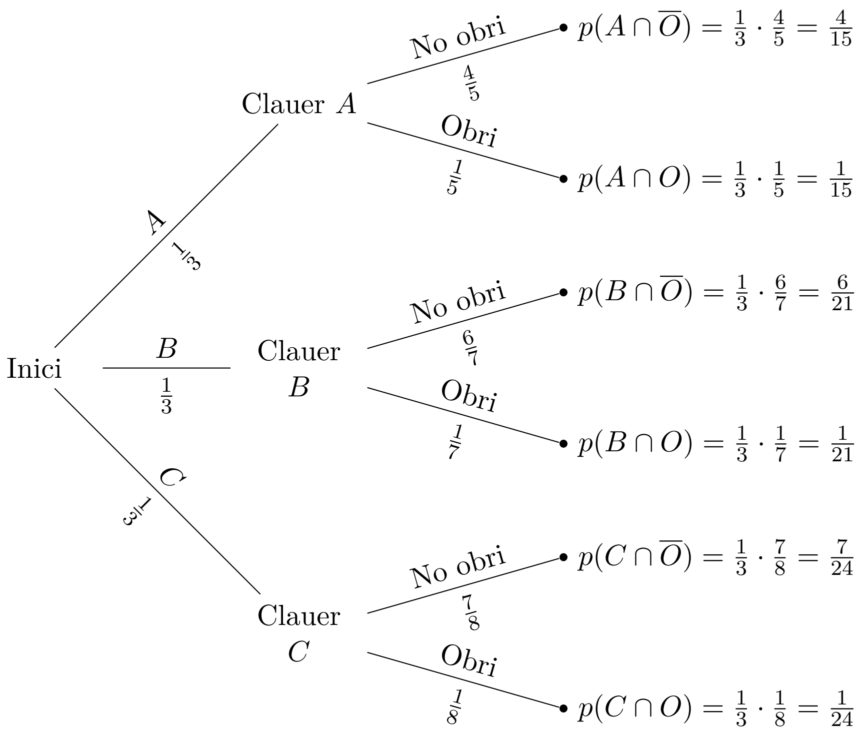


Figura 6.3: Diagrama d'arbre

D'aquesta manera, tenim que

a) La probabilitat d'obrir el rebost és:

$$p(O)=p(A\cap O)+p(B\cap O)+p(C\cap O)=\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{24}=\frac{131}{840}$$

b) La probabilitat de triar el clauer C i no obrir el rebost és $p(C \cap \overline{O}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{24}$.

c) La probabilitat de què s'hagi triat el clauer C sabent que s'ha obert el rebost és $p(C \mid O)$:

$$p(C \mid O) = \frac{p(C \cap O)}{p(O)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{131}{840}} = \frac{1/24}{131/840} = \frac{840}{3144} = \frac{35}{131}$$

Notem diverses coses:

a) Per calcular la probabilitat d'una *fulla* del diagrama d'arbre, hem de multiplicar cadascun del valors de les probabilitats que té cada *branca*. Així hem calculat la probabilitat $p(C \cap \overline{O})$.

b) Cada branca és disjunta, és a dir, la seva intersecció és buida. D'aquesta manera, la probabilitat de què passin esdeveniments que estan a diferents fulles es calcula sumant les seves probabilitats. Així hem calculat $p(O)$.

c) Notem que l'espai mostral d'aquest experiment compost seria

$$\Omega = \{(a, a_1), \ldots, (a, a_5), (b, b_1), (b, b_2), \ldots, (b, b_7), (c, c_1), \ldots (c, c_8)\},$$

on, per exemple, (b, b_5) denota que s'ha triat el clauer B i s'ha triat la cinquena clau d'aquest clauer. D'aquesta manera, triar el clauer A seria l'esdeveniment

$$A = \{(a, a_1), (a, a_2), (a, a_3), (a, a_4), (a, a_5)\}$$

De forma anàloga es definirien els esdeveniments B, triar el clauer B, i C, triar el clauer C. L'esdeveniment "la clau triada obri el rebost", O, seria

$$O = \{(a, a_2), (b, b_3), (c, c_4)\},$$

si suposem que a_2, b_3 i c_4 serien les claus que obririen el rebost. Noteu que el diagrama d'arbre serveix per a trobar fàcilment les probabilitats de A, B, C i O sense haver de manejar conjunts.

d) Als apartats *a*) i *c*) hem aplicat, sense saber-ho, la probabilitat total de l'esdeveniment O i el teorema de Bayes.

Proposició 29 (probabilitat total). *Sigui un esdeveniment B que pot dependre d'altres esdeveniments $A_1, A_2, \ldots, A_n$ incompatibles entre si ($A_i \cap A_j = \emptyset$ per a tots els i, j) i tals que la seva unió és Ω ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$). Aleshores la probabilitat de B es pot calcular com*

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B \mid A_1) + p(A_2) \cdot p(B \mid A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B \mid A_n)$$

Aquesta igualtat es coneix com a probabilitat total de B.

Teorema 30 (teorema de Bayes). *Amb els mateixos termes que el teorema de la probabilitat total,*

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B \mid A_i)}{p(A_1) \cdot p(B \mid A_1) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B \mid A_n)}$$

■

Exercici 213. Llançam una moneda dues vegades. Quina és la probabilitat d'obtenir: *a*) Dues cares? *b*) Almenys una cara? *c*) Una cara i una creu?

Exercici 214. Un moix encalça un ratolí. Aquest pot fugir per tres carrerons diferents, que designarem per A, B i C. Les probabilitats de què el ratolí entri en els carrerons A, B i C són, respectivament, de 0.3, 0.5 i 0.2. Se sap que la probabilitat de què el moix caci al ratolí després de què aquest entri al carreró A és de 0.4, de 0.6 si entra en el carreró B, i de 0.1 si ho fa pel carreró C. Calculeu *a*) la probabilitat de què el moix caci al ratolí *b*) la probabilitat de què el ratolí hagi entrat en el carreró A si sabem que finalment el moix l'ha caçat

Exercici 215. D'un joc de cartes espanyoles, n'extraiem dues (sense reemplaçament). Quina és la probabilitat de què ambdues siguin d'espases?

Solució. Exercici 213 *a*) 1/4 *b*) 3/4 *c*) 1/2 Exercici 214 *a*) 0.44 *b*) 0.273 Exercici 215 11/188 ■

Exercici 216. A certa floristeria varen rebre quantitats iguals de roses i gladiols, de color groc i blanc. El 60% dels gladiols són de color groc, mentre que el 70% de les roses són de color blanc.

a) Si triem una rosa, quina probabilitat tenim que sigui de color groc?

b) Quina proporció de flors són de color blanc?

c) Si es varen comprar un total de 2000 flors i prenem dos gladiols, quina és la probabilitat de què aquests siguin de diferent color?

Exercici 217. Una màquina ha produït 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

a) Trobeu la proporció de peces que no són defectuoses

b) Calculeu la probabilitat de què, si examinem dues peces, ambdues resultin defectuoses

c) Calculeu la probabilitat de què, sabent que la segona peça és defectuosa, la primera també ho sigui.

Exercici 218. Un estoig conté 15 llàpissos de color vermell i 10 de color blau.

a) Si triem un llapis a l'atzar, quina probabilitat es té que sigui vermell?

b) Si n'extraiem dos, quina és la probabilitat de què ambdos siguin blaus?

c) Calculeu la probabilitat de què, sabent que el segon és vermell, el primer hagi estat blau

6.5.2 Taules de contingència

Exemple 117. En una empresa hi ha 300 empleats, amb 200 dones i 100 homes. D'aquests, un 30% dels homes i un 40% de les dones tenen un contracte indefinit. Trobeu la probabilitat de què *a*) una persona elegida a l'atzar sigui dona amb contracte indefinit *b*) una persona tengui un contracte indefinit *c*) sigui dona sabent que té un contracte indefinit

Solució. En comptes de fer un diagrama d'arbre, realitzarem una *taula de contingència* (Taula 6.1).

	Homes	Dones	
Contracte indefinit	30	80	110
Altres contractes	70	120	190
Total	100	200	300

Taula 6.1: Taula de contingència del sexe i tipus de contracte

Per saber, per exemple, el nombre d'homes amb contracte indefinit hem calculat el 30% de 100: $\frac{30}{100}\cdot 100 = 30$. De forma anàloga, per saber el nombre de dones amb contracte indefinit: $\frac{40}{100}\cdot 200 = 80$. Per saber els homes i dones amb diferent contracte, hem restat el total menys el nombre de contractes indefinits per sexes.

Amb aquesta taula podem veure fàcilment que

a) La probabilitat de què una persona triada a l'atzar sigui dona amb contracte indefinit és $80/300 = 4/15$

b) La probabilitat de què una persona tengui contracte indefinit és de $110/300 = 11/30$

c) La probabilitat de què una persona sigui dona sabent que té contracte indefinit és

$$p(\text{dona} \mid \text{indefinit}) = \frac{p(\text{dona} \cap \text{indefinit})}{p(\text{indefinit})} = \frac{80/300}{110/300} = \frac{80}{110} = \frac{8}{11}.$$

■

Observació 21. En el cas de no saber el nombre total d'empleats, podríem suposar que fossin 100, per exemple.

Exercici 219. En una determinada població hi ha un 53% de dones. Un 20% dels homes té afició per la lectura. Aquesta afició augmenta fins al 30% en el cas de les dones. Es tria una persona a l'atzar. *a*) Quina és la probabilitat de què sigui dina i no tengui afició a la lectura? *b*) Quina és la probabilitat de què la persona triada sigui una dona sabent que té afició per la lectura?

Solució. *a*) $0,371$ *b*) $0,63$ ■

Exercici 220. En una oficina, el 70% dels empleats són extrangers. De entre aquests, el 50% són dones, mentre que, dels nacionals, són homes el 20%.

a) Quin percentatge d'empleats nacionals són dones?

b) Calculeu la probabilitat de què un empleat de l'oficina sigui dona

c) En Ferran fa feina a l'oficina. Quina és la probabilitat de què sigui extranger?

Solució. *a*) 80% *b*) $0,59$ *c*) $35/41$ ■

Exercici 221. Una ciutat ha remodelat el seu passeig marítim i en diari local ha aparegut l'enquesta, realitzada a 200 persones, sobre si el resultat ha estat satisfactori. Els resultats varien depenent de la zona on viuen els enquestats: dels qui viuen al centre, el 30% li ha agradat el resultat final de les obres. Si viuen a les afores, aquest percentatge ha pujat a un 50%. Dels 200 enquestats, 120 viuen en el centre.

a) Quina és la probabilitat de què a una persona li hagin agradat les obres?

b) Si sabem que la persona li han agradat les obres, quina probabilitat hi ha que visqui en el centre?

Exercici 222. S'ha realitzat un estudi entre els estudiants d'un curs ofimàtica: d'entre els estudiants, un 40% ja havia cursat anteriorment un curset d'ofimàtica. D'aquests, un 20% té un ordinador a casa, mentre que dels que no havien cursat anteriorment ofimàtica, aquest percentatge baixa al 10%.

a) Quina és la probabilitat de què un estudiant tengui ordinador a casa?

b) Si un estudiant té ordinador a casa, quina és la probabilitat de què no hagi rebut abans formació d'ofimàtica?

6.5.3 Diagrames de Venn

Aquest mètode és convenient aplicar-lo quan sabem informació sobre esdeveniments excloents, com per exemple tenir una afició o una altra.

Exemple 118. En un poble, el 55% dels habitants consumeix pa integral, el 30% pa multicereal i el 20% d'ambdós tipus. Quina és la probabilitat de què una persona triada a l'atzar no consumeixi cap dels dos tipus de pa?

Solució. Elaborarem un diagrama de Venn dels consumidors de pa (Figura 6.4). Per fer-ho, suposarem que hi ha 100 habitants al poble (tenim tants per cent al problema, per tant no és una suposició descabellada):

a) Si hi ha 55 habitants que consumeixen pa integral i 20 que també consumeixen multicereal, aleshores n'hi ha 35 que *només* consumeixen pa integral.

b) De la mateixa manera, hi ha 10 persones que només consumeixen pa multicereal.

c) Si en total hi ha 100 persones, tenim que hi ha 35 persones que no consumeixen cap tipus de pa.

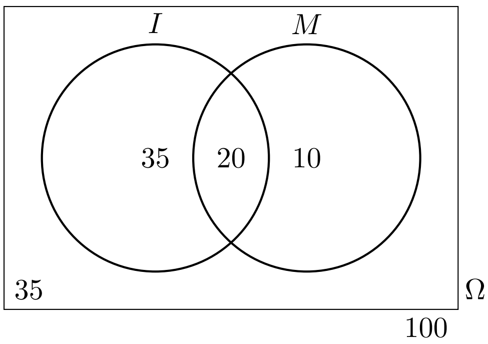


Figura 6.4: Diagrama de Venn dels consumidors de pa

Per tant, la probabilitat de triar un habitant que no consumeixi cap tipus de pa és $p(\overline{I} \cap \overline{M}) = 35/100 = 0.35$.[6]

■

Exercici 223. En una població, es sap que el 30% escolta els informatius per la radio, el 60% per la televisió i el 20% pels dos mitjans. Si es tria una persona a l'atzar, determineu la probabilitat de què:

a) escolti algun dels mitjans de comunicació

b) escolti la radio i no vegi la televisió

c) sabent que no veu la televisió, que escolti la radio

d) escolti només un mitjà de comunicació

[6] Haguéssim pogut obtenir aquest resultat usant les propietats de les operacions d'esdeveniments: $p(\overline{I} \cap \overline{M}) = p(\overline{(I \cup M)}) = 1 - p(I \cup M) = 1 - (p(I) + p(M) - p(I \cap M)) = 1 - (0.55 + 0.30 - 0.20) = 0.35$

Exemple 119. En una ciutat es publiquen tres diaris: A, B i C. El 50% de la gent està subscrita al diari A, el 40% a B i el 30% a C. El 20% està subscrit a A i a B, el 10% a A i C, el 20% a B i C i el 5% a tots els diaris. Si triem una persona a l'atzar d'aquesta ciutat, calculeu la probabilitat de què:

a) estigui subscrit almenys a un diari

b) no estigui subscrit a cap diari

c) estigui subscrit exactament a un diari

Solució. Facem un diagrama de Venn de tres conjunts: subscriptors de A, de B i de C (Figura 6.5). Hem marcat en negreta les dades donades. Per calcular les dades que falten, hem procedit de la manera següent:

a) Hem suposat que hi ha 100 persones en total.

b) Sabem que $|A \cap B \cap C| = 5$ i $|A \cap B| = 20$. Per tant, els subscritors de A i B però que no estan subscrits a C, i.e., $A \cap B \cap \overline{C}$, són $20 - 5 = 15$. De la mateixa manera, $|A \cap C \cap \overline{B}| = 5$ i $|B \cap C \cap \overline{A}| = 15$.

c) Com que $|A| = 50$, per l'apartat anterior, tenim que $|A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 50 - (5 + 5 + 15) = 25$. De la mateixa manera, $|B \cap \overline{C} \cap \overline{A}| = 40 - (5 + 15 + 15) = 5$ i $|C \cap \overline{A} \cap \overline{B}| = 30 - (5 + 5 + 15) = 5$

d) Per últim, $|\overline{(A \cup B \cup C)}| = 100 - 75 = 25$.

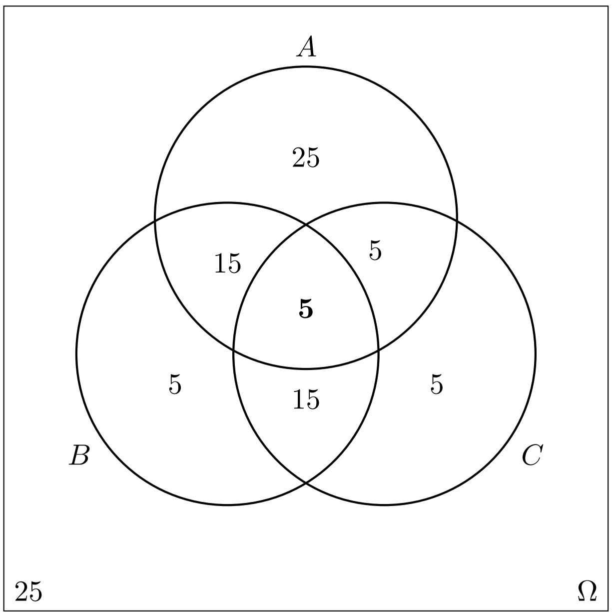


Figura 6.5: Diagrama de Venn dels subscriptors de diaris

Per tant, amb tot,

a) $p(\text{almenys un diari}) = \frac{25+15+5+5+15+5+5}{100} = 75/100 = 0.75$

b) $p(\text{cap diari}) = 25/100 = 0.25$

c) $p(\text{exactament 1 diari}) = \frac{25+5+5}{100} = 35/100 = 0.35$

■

Exercici 224. En un grup de matrimonis heterosexuals s'ha observat que en el 50% dels casos la dona té estudis universitaris. En un 30% tant l'home com la dona els té i, finalment, el $37,5\%$ dels matrimonis en els que l'home té estudis universitaris i la dona no els té.

a) Quina probabilitat hi ha de què en un matrimoni heterosexual l'home tengui estudis universitaris?

b) En quin percentatge de matrimonis heterosexuals en els que la dona té estudis universitaris, l'home també els té?

c) Quin percentatge correspon a matrimonis en el que l'home no té estudis universitaris i la dona sí?

Solució. *a*) $0,675$, *b*) 60%, *c*) 20% ■

Exercici 225. Un estudiant fa dues proves el mateix dia. La probabilitat de què passi la primera és de $0,6$, la que passi la segona és de $0,8$ i de què passi ambdues és de $0,5$. Es demana:

a) la probabilitat de què passi almenys una prova

b) la probabilitat de què no passi cap prova

c) són les proves esdeveniments independents?

d) la probabilitat de què passi la segona prova en cas de no haver superat la primera

Solució. *a*) $0,9$, *b*) $0,1$, *c*) no són independents *d*) $0,75$ ■

Exercici 226. Un aparell elèctric està constituït per dos components: A i B. Sabent que hi ha una probabilitat de $0,58$ de què no falli cap element, i que en el 32% dels casos falla B però no A, determineu la probabilitat de què en un d'aquests aparells no falli el component A.

Solució. $0,9$ ■

6.6 Exercicis proposats

Exercici 227. Un restaurant té contractats a dos cambrers: Javier i Ana per atendre el servei del menjador. Ana posa el servei el 70% dels dies i es confon al col · locar els coberts només el 5% dels dies. Mentre, Javier col · loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.

a) Aquest matí, l'encarregat del restaurant ha passat revista al servei. Quina és la probabilitat de què trobi algun servei mal col · locat?

b) Per desgràcia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col · locats i vol trobar quina és la probabilitat de què hagi estat en Javier

Solució. *a*) $0,11$ *b*) $15/22$ ■

Exercici 228. Certa persona compra tots els dies el diari local, comprant-lo indistintament en un de les botigues, A i B, que estan més pròximes a ca seva. El 80% dels dies el compra a la botiga A.

a) Quina proporció dels dies compra el diari a la botiga B?

b) Quina probabilitat hi ha de què compri dos dies el diari a la botiga A?

c) Quina és la probabilitat de què dos dies consecutius compri el diari a dues botigues diferents?

Solució. *a*) $0,20$ *b*) $0,64$ *c*) $0,32$ ■

Exercici 229. La probabilitat de què un aficionat al futbol vagi al camp municipal a veure un partit és del 90% quan es disputa en cap de setmana i el 50% si té lloc en un dia laborable. La probabilitat de què un partit es jugui en cap de setmana és la mateixa que se jugui entre setmana.

a) Cert partit es celebrarà la setmana que ve en un dia encara sense determinar. Calculeu la probabilitat de què els aficionats vagin a veure'l al camp

b) Si finalment un aficionat va anar a veure el partit, quina és la probabilitat de què aquest hagi estat en cap de setmana?

Solució. *a*) $0,7$ *b*) $45/70$ ■

Exercici 230. En una capsa estan desats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

a) Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé?

b) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, quina és la probabilitat de què funcionin els dos correctament?

c) Si el segon no funciona correctament, quina és la probabilitat de què el primer tampoc ho faci?

Exercici 231. El 25% de les famílies de certa comunitat autònoma espanyola no surt fora de la mateixa durant les vacances d'estiu. El 65% estiueja per la resta de l'estat i el 10% restant se'n va a l'extranger. Dels qui queden a la seva comunitat, només un 10% no usa cotxe en els desplaçaments. Aquesta quantitat augmenta al 30% entre els que surtin per la resta d'Espanya, i al 90% entre els que viatgen a l'extranger.

a) Calculeu el percentatge de famílies d'aquesta comunitat que utilitza el cotxe en els seus desplaçaments d'estiu

b) Una família no usa cotxe en les seves vacances d'estiu. Quina és la probabilitat de què surti de la comunitat movent-se per la resta d'Espanya?

Solució. *a*) 69% *b*) 13/20 ■

Exercici 232. Un grup de 40 persones acabar de prendre un bus. D'aquests, només 10 són fumadors. Entre els fumadors, el 70% es mareja durant el viatge. I entre els qui no fumen, aquesta quantitat baixa al 40%.

a) Quina probabilitat hi ha que dues persones siguin fumadores ambdues?

b) Quina és la probabilitat de què un viatger no es maregi?

Solució. *a*) $3/52$ *b*) $0,525$ ■

Exercici 233. Dos joves aficionats als jocs d'atzar es troben realitzant un solitari amb una baralla espanyola. Extreuen una carta de la baralla i volen saber quina és la probabilitat d'obtenir rei condicionat a què s'hagi tret figura

Solució. $1/3$ ■

Exercici 234. En un país s'ha constituït una comissió parlamentària integrada per deu membres, dels quals set pertanyen al partit governant i la resta al partit de l'oposició. Entre els set membres del partit governant hi ha quatres homes; dos entre els del partit de l'oposició. El president de la comissió s'elegeix per sorteig entre els seus integrants. Celebrat el sorteig, es sap que el president triat ha estat un home. Quin partit té més possibilitats de dirigir la comissió?

Solució. $2/3$ ■

Exercici 235. S'ha fet un estudi d'un nou tractament sobre 120 persones que pateixen certa enfermetat. Trenta d'elles ja han patit l'enfermetat amb anterioritat. Entre les persones que l'han patida anteriorment, el 80% ha reaccionat positivament al nou tractament. De les que no la han patida amb anterioritat, el percentatge de la reacció positiva ha estat del 90%.

a) Si triem a l'atzar un pacient, quina és la probabilitat de què no reaccioni positivament al nou tractament?

b) Si un pacient ha reaccionat positivament al tractament, quina és la probabilitat de què no hagi patit l'enfermetat amb anterioritat?

Exercici 236. A cert curs d'un centre d'ensenyament, el 62.5% dels alumnes varen aprovar Matemàtiques. D'altra banda, d'entre els qui varen aprovar Matemàtiques, el 80% també varen aprovar Física. Es sap igualment que només el $33,3\%$ dels qui no varen aprovar Matemàtiques varen aprovar Física.

a) Quin percentatge va aconseguir aprovar ambdues assignatures alhora?

b) Quin va ser el percentatge d'aprovats a l'assignatura de Física?

c) Su un estudiant no aprovà Física, quina és la probabilitat de què aprovàs Matemàtiques?

Exercici 237. El 70% dels sol · licitants d'un lloc de feina té experiència i a més formació adient amb el lloc de treball. Malgrat això, hi ha un 20% que té experiència i no una formació adient. Es sap també que entre els sol · licitants que tenen formació adient amb el lloc, un 88, 5% té experiència.

a) Quina és la probabilitat de què un sol · licitant no tengui experiència?

b) Si un sol · licitant té experiència, quina és la probabilitat de què la seva formació sigui adient amb el lloc de treball?

c) Calculeu la probabilitat de què un sol · licitant tengui formació adient amb el lloc.

Exercici 238. Un grup d'amics ha estat parlant sobre els seus gusts musicals. La música clàssica agrada al 20% d'ells. Es sap també que el percentatge dels qui els agrada la música moderna d'entre els que els agrada la música clàssica és del 75% i que el percentatge de qui els agrada la música moderna d'entre els qui no els agrada la música clàssica és del 87, 5%.

a) Quina és la probabilitat de què a un individu del grup li agradi la música moderna?

b) Quina és la probabilitat de què a un individu del grup li agradi tant la música clàssica com la moderna?

c) Si a una persona li agrada la música moderna, quina és la probabilitat de què tamé li agradi la música clàssica?

d) Si a una persona no li agradi la música moderna, quina és la probabilitat de què li agradi la clàssica?

Exercici 239. En un grup de matrimonis heterosexuals s'ha observat que en el 50% dels casos la dona té estudis universitaris; en un 30% tant l'home com la dona els tenen; finalment, en el 37, 5% dels matrimonis en els que l'home té estudis universitaris, la dóna també els té. En aquest grup de matrimonis:

a) Quina probabilitat hi ha de què en un matrimoni el marit tengui estudis universitaris?

b) En quin percentatge de matrimonis en els que la muller té estudis universitaris el marit també els té?

c) En quin percentatge de matrimonis el marit no té estudis universitaris i la muller sí?

Exercici 240. En un grup de persones, al 50% els hi han posat alguna vegada una multa de trànsit. D'altra banda, al $12,5\%$ no els hi han posat mai cap multa però sí han sofert alguna vegada un accident. Finalment, al 60% dels qui mai han tengut un accident no els hi han posat mai una multa.

a) Quin percentatge de persones no han tengut mai un accident ni els hi han posat una multa?

b) Quin percentatge de persones no han tengut mai cap accident?

c) Entre les persones que mai han tengut cap multa, quin percentatge no ha tengut mai un accident?

Exercici 241. L'urna S conté 4 bolles blanques i 3 negres, i l'urna T conté 3 bolles blanques i dues negres. Prenem a l'atzar una bolla de l'urna S i, sense mirar-la, la introduïm a l'urna T. A continuació, extraïem amb reemplaçament dues bolles de l'urna T. Trobeu la probabilitat de què:

a) les bolles siguin del mateix color

b) les bolles siguin de distint color

Exercici 242. Un banc concedeix tres tipus de crèdits: hipotecaris, empresarials i personals. Es sap que el 30% dels crèdits concedits són hipotecaris; el 50%, empresarials; i el 20% restant són personals. Han resultat impagats el 20% dels crèdits hipotecaris, el 25% dels crèdits empresarials i el 50% dels crèdits personals. Es demana:

a) Representar la situació mitjançant un diagrama d'arbre

b) Seleccionat un crèdit a l'atzar, calcular la probabilitat de què es pagui

c) Un crèdit determinat ha resultat impagat. Calculeu la probabilitat de què sigui un crèdit hipotecari

Exercici 243. En un trajecte entre dues ciutats pròximes, un automobilista ha d'atravessar tres zones que estan en obres i en les que es regula el trànsit mitjançant semàfors. La probabilitat de trobar el semàfor en vermell per a cadascuna de les tres zones és $0,3$, $0,7$ i $0,5$. Calculeu la probabilitat de què el conductor:

a) Trobi els tres semàfors en vermell

b) Trobi els tres semàfors en vermell

c) Trobi exactament un semàfor en vermell *d*) Trobi almenys un semàfor en vermell

Exercici 244. En un determinat barri d'una ciutat s'ha observat que el 70% dels seus habitants té més de 50 anys i que d'aquests el 60% és propietari de la vivenda que habita. També es sap que el percentatge de propietaris és del 30% entre aquelles persones que no superen els 50 anys. Es demana:

a) Trobar la probabilitat de què un veïnat del barri, el qual ha estat triat a l'atzar, sigui propietari de la vivenda en la qual habita.

b) Triat un veïnat a l'atzar, que és propietari de la vivenda on habita, calculeu la probabilitat de què tengui més de 50 anys.

Exercici 245. Provem una vacuna contra el grip en un grup de 400 persones, de les quals 180 són homes i 220 dones. De les dones, 25 es contagien de grip i, dels homes, ho fan 23. Determineu les probabilitats de què:

a) Al seleccionar una persona a l'atzar, resulti que no té grip

b) Al seleccionar una persona a a l'atzar, resulti ser una dona que no té grip

c) Seleccionada una persona que no té grip, resulti que sigui un home

d) Seleccionada una dona, resulti que no té grip

Exercici 246. El 20% dels empleats d'una empresa són enginyers i un altre 20% són economistes. Tres de quatre enginyers ocupa un càrrec directiu, mentre que només ho fa el 50% dels economistes. De la resta dels empleats, només ocupen càrrecs directius un 20%. Calculeu les probabilitats de què:

a) Al seleccionar un empleat a l'atzar resulti ser un enginyer que no ocupa càrrec directiu

b) Al seleccionar un empleat a l'atzar resulti no ser ni enginyer ni economista, però que ocupi un càrrec directiu

c) Al seleccionar un càrrec directiu a l'atzar resulti ser economista

d) Al seleccionar un càrrec directiu a l'atzar resulti ser enginyer o economista

Exercici 247. El 15% dels habitants d'un país pateix certa enfermetat. Per a diagnosticar-la es disposa d'un procediment, el qual no és completament fiable: dóna positiu en el 90% dels casos de persones realment malaltes, però també dóna positiu en el 5% de les persones sanes (el que es coneix com *fals positius*). Determineu la probabilitat de què:

a) estigui sana una persona el diagnòstic de la qual ha donat positiu *b*) estigui malalta una persona el diagnòstic del qual ha estat negatiu

Exercici 248. Tres avions disparen simultàniament a un blanc, sent independients els dispars l'uns dels altres, i sent la probabilitat de què un avió acerti al blanc de $0,6$. Calculeu la probabilitat de què el blanc sigui destruït.

Exercici 249. Una caixa conté 100 peces, entre les que hi ha 20 defectuoses pel que fa a la longitud, 12 defectuoses pel que fa a l'amplada i 15 defectuoses pel que fa a l'altura. D'altra banda, sabem que hi ha 7 peces defectuoses en longitud i altura, 4 peces defectuoses en longitud i amplada, 5 que ho són en amplada i altura i 2 defectuoses en els tres aspectes. Es demana:

a) La probabilitat de què una peça triada a l'atzar presenti un sol defecte.

b) La probabilitat de què una peça triada a l'atzar sigui defectuosa només pel que respecte a la longitud

Exercici 250. De 150 pacients, 90 tenen una enfermetat cardíaca, 50 tenen càncer i 20 tenen ambdues enfermetats. Determineu la probabilitat de què un pacient triat a l'atzar tengui només una de les dues enfermetats.

Exercici 251. Una màquina es composa de dos components: A i B. La probabilitat de què el component A falli és de $0,05$ mentre que la probabilitat de què B arribi a fallar és de $0,03$. La màquina funciona correctament sempre que ho fan ambdos components i també en el 30% dels casos en què ambdos components es comportin erròniament. En cas contrari, la màquina falla. Calculeu la probabilitat de què la màquina no funcioni correctament.

Exercici 252. Els habitants d'un poble poden votar entre dos partits polítics: A i B. El 55% dels habitants són menors de 30 anys; d'ells, el 80% són del partit B. Dels majors de 30 anys, només ho són 1 de 10 persones. Escollim una persona a l'atzar.

a) Calculeu la probabilitat de què sigui del partit A

b) La persona triada resulta ser del partido A. Quina probabilitat hi ha de què tengui menys de 30 anys?

Exercici 253. N'Aina, en Bartomeu i en Cristòfol sortegen a l'atzar l'ordre en què entraran per una porta.

a) Calculeu la probabilitat de què els dos darrers en entrar siguin homes

b) Determineu si són independients els esdeveniments 'la dona entra abans que algun dels homes' i 'els dos homes entren consecutivament'.

Exercici 254. Es tenen dues urnes, U_1 i U_2, el contingut del qual és el següent:

- en l'urna U_1 hi ha 4 bolles blaves, 3 vermelles i 3 verdes

- en l'urna U_2 hi ha 4 bolles vermelles, 5 blaves i 1 verda

Es llancen tres monedes a l'aire i si s'obtenen dues cares, s'extreu una bolla de l'urna U_1; en qualsevol cas, s'extreu una bolla de l'urna U_2. Trobeu la probabilitat de què la bolla extreta sigui blava. Ajudeu-vos d'un diagrama d'arbre.

Exercici 255. Un aparell elèctric està constituït per dos components, A i B. Sabent que hi ha una probabilitat de $0,58$ que no falli cap dels dos components, i que en el 32% dels casos falla B no havent fallat A, determineu la probabilitat de què en un d'aquests aparells no falli el component A.

Exercici 256. Una urna, A, conté 5 bolles blanques i 3 de negres. Una altra urna, B, en té 6 de blanques i 4 de negres. Elegim una urna a l'atzar i extraiem dues bolles, que resulten ser negres. Trobeu la probabilitat de què l'urna elegida hagi estat la B.

Part IV

Apèndixs

A

Recordatori de matemàtica elemental

Aquí es fa un recordatori de qualcuns continguts de matemàtiques elementals.

A.1 Operacions amb nombres

A.1.1 Sumes i restes

Si en una expressió només hi apareixen sumes i restes de nombres sencers, el valor final d'aquesta expressió es calcula de la manera següent:

1. es sumen per separat el nombres positius i els nombres negatius
2. es resten els resultats de l'apartat anterior i es posa el signe del que tengui major valor absolut.

Exemple 120.

$$-2+8-15-3+7=15-20=-5$$

A.1.2 Producte i quocient de dos nombres

Per multiplicar o dividir *dos* nombres es segueix la regla següent: si els dos nombres tenen el mateix signe, el resultat del producte o de la divisió és positiu, i si els dos nombres tenen signes diferents, el resultat és negatiu.

Exemple 121.

$$-2 \cdot (-3) = 6$$

$$20 : (-4) = -5$$

A.1.3 Jerarquia d'operacions

Per a calcular expressions aritmètiques que tenen diverses operacions, s'aplica un ordre en la que certes operacions es calculen abans que unes altres. S'anomena *jerarquia d'operacions* a l'ordre en el que s'efectuen les operacions. Aquesta és:

1. Parèntesis
2. Potències
3. Productes i divisions
4. Sumes i rectes

Exemple 122. Calculeu

$$3 + 4 \cdot 5$$

Per a calcular aquesta expressió, hem de calcular en primer lloc el producte, encara que l'operació no sigui la primera en aparèixer. En posterioritat, calcularíem la suma. Per tant,

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cdot 5 &= 3 + 20 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Exemple 123. Calculeu

$$(3+4) \cdot 5 + \frac{1}{2} - \left(3^2 - 5 \cdot 2\right)^2 + 2^2$$

En primer lloc, calcularem els parèntesis. S'ha de dir que com que el resultat d'un no influeix al resultat de l'altre, llavors es poden calcular de forma simultània. En general, podem fer això sempre que les subexpressions siguin sumands d'una expressió més general (tècnicament es diuen *termes*). Així, calcularíem l'expressió numèrica de la forma:

$$
\begin{aligned}
(3+4)\cdot 5+\frac{1}{2}-\left(3^2-5\cdot 2\right)^2+2^2 &= 7\cdot 5+\frac{1}{2}-(9-10)+4 \\
&= 35+\frac{1}{2}-(-1)+4 \\
&= 35+\frac{1}{2}+1+4 \\
&= 40+\frac{1}{2} \\
&= \frac{81}{2}
\end{aligned}
$$

A.1.4 Càlcul del mínim comú múltiple

Definició 64 (múltiple d'un nombre). Donat dos nombres a, b, direm que b és un *múltiple* de a si, i només si, existeix un altre nombre r tal que $a \cdot r = b$ o dit d'altra manera si quan dividim b entre a el reste és 0.

Exemple 124. 60 és múltiple de 2 perquè $2 \cdot 30 = 60$. També és múltiple de 3, 5, 10, 20, 30 i 60. Però 60 no és múltiple de 40 perquè 60 entre 40 no dóna reste 0.

Es pot fer una llista de *tots* els múltiples d'un nombre multiplicant aquest nombre consecutivament per 1, 2, etc. Per exemple, els múltiples de 60 són: $60 \cdot 1 = 60$, $60 \cdot 2 = 120$, $60 \cdot 3 = 180$, etc.

Definició 65 (mínim comú múltiple). Donats els nombres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ el seu *mínim comú múltiple* és el menor de tots els seus múltiples comuns. El mínim comú múltiple s'abreuja mcm.

Exemple 125. Els nombres 10 i 12 tenen com a mínim comú múltiple. La raó és que:

- Els múltiples de 10 són: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120, ...
- Els múltiples de 12 són: 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, ...

Per tant, els múltiples comuns són 60, 120, etc. Llavors 60 és el menor d'aquests múltiples i, per tant, és el mcm.

Existeixen diversos procediments per a calcular el mínim comú múltiple de diversos nombres:

Algorisme 6 (càlcul del mcm amb la llista de múltiples). *Pel càlcul del mcm dels nombres a_1, a_2, ..., a_r es procedeix de la manera següent:*

1. *Es llisten els múltiples de cada nombre*
2. *Es selecciona el múltiple més petit*

L'exemple anterior (exemple 125) exemplifica aquest procediment.

S'ha de dir que aquest procediment és molt lent, sobretot per nombres grans.

Algorisme 7 (càlcul del mcm amb la factorització de nombres). *Pel càlcul del mcm dels nombres a_1, a_2, ..., a_r es procedeix de la manera següent:*

1. *Es factoritzen els nombres en factors primers*[1]
2. *El mínim comú múltiple s'obté prenent tots els factors elevats al màxim exponent*

Aquest és el procediment *estàndard* per al càlcul del mínim comú múltiple.

Exemple 126. Calculeu el mcm de 20, 12 i 100:

1. Factoritzem els nombres
2. Per tant, $20 = 2^2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$ i $100 = 2^2 \cdot 5^2$
3. Llavors el mcm és igual a $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Algorisme 8 (càlcul del mcm de forma ràpida per nombres petits). *Aquest algorisme és ràpid sobretot per nombres petits. Si a, b, c i d són els nombres dels quals volem trobar el mínim comú múltiple, aleshores:*

1. *Es selecciona el nombre més gran. Suposem que és a*
2. *Es generen els seus múltiples*
3. *Per a cada múltiple es comprova si aquest és múltiple dels altres nombres, és a dir, si la seva divisió dóna exacte*
4. *Si és així, llavors aquest és el mínim comú múltiple. En cas contrari, es genera el múltiple següent de a.*

El més usual és que necessitem el mínim comú múltiple per resoldre equacions de primer grau que tenguin fraccions. En aquest cas però no és necessari calcular el mínim comú múltiple. Bastaria calcular un múltiple (vegi's Secció A.2).

Exercici 257. Calculeu el mínim comú múltiple per als conjunts de nombres següents:

a) 20 i 8
b) 12 i 42
c) 8 i 12
d) 12 i 21
e) 30 i 65
f) 10 i 12
g) 20 i 36
h) 15, 20 i 30
i) 6, 8 i 12

[1] La llista de primers és infinita, però els sis primers primers són: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

j) 30, 45 i 60

k) 12, 18, 20 i 32

l) 17, 68 i 34

m) 10, 105 i 22

n) 25, 75 i 200

Solució. *a*) 40, *b*) 84, *c*) 24, *d*) 84, *e*) 390, *f*) 60, *g*) 180, *h*) 60, *i*) 24, *j*) 180, *k*) 1440, *l*) 68, *m*) 2310, *n*) 600 ■

A.2 Equacions de primer grau

Per resoldre una *equació de primer grau* es segueixen les passes de l'exemple següent:

Exemple 127. Resol l'equació

$$5x - \frac{3x+1}{8} = x + \frac{5x-3}{4} - \frac{3}{2}$$

Resolució:

1. Primer:
$$\frac{5x}{1} - \frac{3x+1}{8} = \frac{x}{1} + \frac{5x-3}{4} - \frac{3}{2}$$
2. Segon (càlcul del mcm): $mcm\,(8,4,2) = 8$
3. Tercer (reducció a comú denominador):
$$\frac{40x}{8} - \frac{3x+1}{8} = \frac{8x}{8} + \frac{2\cdot(5x-3)}{8} - \frac{12}{8}$$
4. Quart (eliminem els denominadors):
$$40x - (3x+1) = 8x + 2\cdot(5x-3) - 12$$
5. Cinquè (eliminem els parèntesis):
$$40x - 3x - 1 = 8x + 10x - 6 - 12$$
6. Sisè (transposició de termes):
$$40x - 3x - 8x - 10x = -6 - 12 + 1$$
7. Setè (operar):
$$19x = -17$$
8. Vuitè (aïllar l'incògnita):
$$x = \frac{-17}{19}$$

Nota 1. Normalment es passa del segon al cinquè pas quan es té suficient soltura.

Nota 2. D'altra banda, es pot no calcular el mínim comú múltiple dels denominadors i només calcular-ne *un* múltiple. Per exemple es podria calcular el múltiple sorgit de la multiplicació dels denominadors, o sigui, $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$. I realitzar tots els càlculs amb 64 en comptes de 8. L'equació resultant tendria les mateixes solucions, encara que els nombres sorgits (dels passos tercer al vuitè) serien majors.

Exercici 258. Resoleu les equacions següents:

a) $x + 1 = 5$
b) $x - 10 = 50$
c) $3x - 10 = 30$
d) $5x - 2 = 13$
e) $\frac{x}{2} = 8$
f) $\frac{x}{2} + 1 = 8$
g) $\frac{x}{3} - 4 = 8$
h) $2x + 1 = 7 - x$
i) $3x + 10 = 22 + x$
j) $4x + 2 = 10 + 2x$
k) $5x - 2 = 13 + 3x$
l) $2x + 1 = 5$
m) $2x + 10 = 2(7 - x)$

Solució. *a*) 5, *b*) 60, *c*) $\frac{4}{3}$, *d*) 3, *e*) 16, *f*) 14, *g*) 36, *h*) 2, *i*) 6, *j*) 4, *k*) $\frac{15}{2}$, *l*) 2, *m*) 0 ■

Exercici 259. Resoleu les equacions següents:

a) $-(3x + 10) = 1 - (21 + x)$
b) $2(x + 2) = 24 - 2x$
c) $2(x - 2) = 3(1 - x) - 7$
d) $1 - (3x + 10) = 1 - (14 - x)$
e) $3 - 2(x - 2) = -5 - 3(1 - x)$

Solució. *a*) 5, *b*) 0, *c*) 1, *d*) 3 ■

Exercici 260. Resoleu les equacions següents:

a) $(x + 2) - (x + 3) = 2 - 3(1 - x)$
b) $2x + 1 + (2x - 3) = 2 + 3(1 - x)$
c) $x + 1 + (3 - x) = -3(1 - 2x) - 5$
d) $2(x + 2) - (x + 3) = 1 - 3x$
e) $-(2x + 1) + (2x - 3) = -2 - 3(1 - x)$
f) $3x - (x - 2) = -3(1 + x) + 20$

Solució. *a*) 0, *b*) 1, *c*) 2, *d*) 0, *e*) 1, *f*) 2 ■

A.3 Extracció de factor comú

El factor comú d'una expressió pot ser un nombre, una lletra, o bé ambdues coses:

Exemple 128.

$$\begin{aligned}
-8+12-6+2 &= 2\cdot(-4+6-3+1) \\
-x^5+4x^3-x^2 &= x^2\cdot\left(-x^3+4x-1\right) \\
5x^6-10x^4-15x^3 &= 5x^3\cdot\left(x^3-2x-3\right)
\end{aligned}$$

A.4 Equacions de segon grau

Les *equacions de segon grau* són aquelles que involucren una x^2. Formalment es formen igualant un polinomi de segon grau a zero (vegeu Secció A.5).

Les equacions de segon grau són de la forma

$$ax^2+bx+c=0,\ \text{amb } a\neq 0 \tag{A.1}$$

La solució d'aquestes equacions es calcula amb la fórmula següent:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{A.2}$$

Exemple 129. La solució de l'equació $x^2-5x+6=0$ és

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2} \\
&= \frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \\ \frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}
\end{aligned}$$

Les *equacions incompletes* de segon grau, és a dir, aquelles en les quals $b=0$ o $c=0$ (o tots dos valen zero) es poden resoldre d'una altra manera, encara que també es poden resoldre amb la fórmula de segon grau. Aquí en donem dos exemples (les equacions de segon grau que tenen tots els termes diferents de zero, s'anomenen *equacions completes*).

Exemple 130.

$$-3x^2+12=0;\ -3x^2=-12;\ x^2=\frac{-12}{-3}=4;\ x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Exemple 131.

$$2x^2-5x=0;\ x\,(2x-5)=0\ \begin{cases} x=0 \\ 2x-5=0;\ x=\frac{5}{2}\end{cases}$$

En general, les equacions de segon grau poden no ser de la forma (A.1), encara que sempre es poden reduir a aquesta forma.

Exemple 132. Resoleu l'equació $-3x^2 - 2x + 15 = -15 + 2x + 2x^2 + x$.

Aquesta equació és equivalent a $-3x^2 - 2x + 15 + 15 - 2x - 2x^2 - x = 0$. Sumant els termes semblants, tenim que això és equivalent a $-5x^2 - 5x + 30 = 0$. Aplicant la fórmula de segon grau (A.2), obtenim que les solucions són 2 i -3.

Exercici 261. Resoleu les equacions de 2n grau següents:

a) $4x^2 + 2x - 4 = -2x + 4$

b) $9x^2 - 63x + 90 = 0$

c) $-x^2 - 3x + 10 = x^2 + 3x - 10$

d) $-2x^2 + 4x - 3 = -2x + x^2$

e) $2x^2 + 4x + 1 = -1$

f) $2x + 1 = -2 - x^2$

Solució. *a*) -2 i 1, *b*) 2 i 5, *c*) -5 i 2, *d*) 1, *e*) -1, *f*) no té solució ■

Exercici 262. Resoleu les equacions de 2n grau següents:

a) $3x^2 + 2x = 5x - 2$

b) $10x - 8x = x^2 - 5$

c) $9x - 8 = 7 - x^2$

d) $8x^2 - 2 = 10x^2 - 5x$

e) $(x-2)^2 - 5 = 10$

f) $3(x+4)^2 = 10$

g) $(x-2)^2 - 8 = 20x$

h) $5(x-1)^2 = 2$

i) $(x-1)^2 = -4$

j) $(x-5)^2 = 5x^2$

Solució. *a*) no té solucions, *b*) no té solucions, *c*) $-\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{141}}{2}$, *d*) 2 i $\frac{1}{2}$, *e*) $2 \pm \sqrt{15}$, *f*) $-4 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$, *g*) $6 \pm 2\sqrt{37}$, *h*) $1 \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$, *i*) no té solució, *j*) $-\frac{5}{4} \pm 5\frac{\sqrt{5}}{4}$ ■

Nota 3. Recordeu que $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$.

A.5 Arrels de polinomis

Definició 66. Un *monomi* és una expressió algebraica formada pel producte d'un nombre real i una o diverses lletres. Al nombre se l'anomena *coeficient* del monomi; a la part que conté les lletres de l'anomena *part literal*. Les diverses lletres s'anomenen *variables*.

Exemple 133. Les expressions següents són monomis:

- $5x^3$
- $2x^2y^5$

- $-4xy$
- $\frac{-6}{5}x^4$
- $6x$
- 8

En canvi aquestes expressions no són monomis:

- $\frac{5}{x}$
- $5x^3\sqrt{y}$
- $3x^{-2}$

Definició 67. Un *polinomi* és una expressió algebraica formada per la suma de diversos monomis. Els monomis que formen part del polinomi s'anomenen *termes*.

Aquí només veurem polinomis d'una variable, usualment x, com per exemple $4x^2 - 5x + 2$ o $5x^4 + 2x^2$.

Definició 68. El *grau* d'un polinomi d'un variable és el major exponent de la variable de cadascun dels seus termes

Exemple 134. El grau del polinomi $4x^5 - 2^3 - 5x + 8$ és 5 i el grau de $x^{10} - 2x^2 - 5x$ és 10.

Definició 69. El *terme independent* d'un polinomi és el monomi de grau 0 del polinomi. Pot no tenir-ne.

Exemple 135. El terme independent del polinomi $4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ és -7; en canvi el polinomi $4x^3 - 2x^2 - 5x$ no en té.

Pendent: Arrel d'un polinomi
Pendent: Reals vs enteres
Pendent: Ruffini

Exercici 263. Factoritzeu els polinomis següents:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

c) $15x^3 + 25x^2 - 10x$

d) $3x^3 - 3x^2 - 6x$

e) $2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 8x + 12$

f) $-x^3 + x^2 + 4x - 4$

g) $-5x^4 + 20x^2 - 20$

h) $3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x$

Solució. *a*) $(x-1)(x+2)(x-3)$, *b*) $(x-1)(x^2+9)$, *c*) $5x(3x-1)(x+2)$, *d*) $3x(x-2)(x+1)$, *e*) $2(x-1)(x^2-2)(x+3)$, *f*) $-(x-1)(x+2)(x-2)$, *g*) $-5(x^2-2)(x^2-2)$, *h*) $3(x-2)x(x-3)(x+3)$ ■

Exercici 264. Trobeu les arrels dels polinomis següents:

a) $x^4 + 3x^3 - 40x^2$

b) $2x^3 - x^2 - 118x - 315$

c) $x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 6x$

d) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12$

e) $3x^4 - 12x^3 - 33x^2 + 90x$

f) $x^4 + 28x^3 - 60x^2$

Solució. *a*) -8, 0 i 5, *b*) -5, $\frac{-7}{2}$ i 9, *c*) 0, 2 i $\pm\sqrt{3}$, *d*) $\pm\sqrt{2}$, 2 i -3, *e*) 2, -3, 0 i 5, *f*) 0 (doble), 2 i -30 ■

Exercici 265. Resoleu les equacions següents:

a) $x^4 + 3x^3 - 40x^2 = 0$

b) $2x^3 - x^2 - 118x = 315$

c) $x^3 - \frac{5x^2}{2} + x = 0$

d) $x^4 - x^3 - (11x^2)/4 + 2x = -3/2$

Solució. *a*) -8, 0 i 5, *b*) 5, $\frac{-7}{2}$ i 9, *c*) $\frac{1}{2}$, 2 i 0, *d*) $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$ ■

B

Solucions

B.1 Determinants

6 $a)$ 13, $b)$ 73 $c)$ -12 $d)$ 18 $e)$ -256

7 $a)$ 256 $b)$ -32 $c)$ 296 $d)$ 0 $e)$ -200

8 $a)$ $-\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13,$ $b)$ $36 \cdot \begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = 36 \cdot 13 = 468$ (aplicant observació 1 de Secció 1.4 dues vegades i l'apartat anterior), $c)$ $4 \cdot (-13) = -52$ (aplicant observació 1 de Secció 1.4)

9 $a)$ sí (Element 3 de Secció 1.4), $b)$ sí (en els dos casos, $3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$)

$c)$ no ($3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$)

10 $a)$ $-\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} = -(mq - np) = -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 5$[1], $b)$ $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3n & 3q \\ n & q \end{vmatrix}$ $= -5 + 3 \cdot 0 = -5$, $c)$ $-3 \cdot \begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -15$ $d)$ $2 \cdot \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10,$

[1] Es podria haver vist aquest resultat usant que els determinants d'una matriu quadrada i de la seva transposta són iguals (vegi's Element $b)$ de Element 2.3).

$$e)\ 1/m \cdot \begin{vmatrix} m & n \\ mp & mq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5,\ f)\ 5 \cdot \begin{vmatrix} m & m \\ p & p \end{vmatrix} = 0$$

11 *a*)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{vmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (5+0) = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$$

12 *a*) Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant és igual a $x^3 - x = x(x^2-1) = 0$ si, i només si, $x = 0$ o $x = \pm 1$, *b*) Fent Sarrus, tenim que $-2a + 2 = 0$ si, i només si, $a = 1$ *c*) $\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a & 2 & 0 \end{vmatrix} +$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (a-1)\Delta$, on $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (a+3)$. Per tant, $a = 1$ o $a = -3$.

13 En comptes de calcular aquest determinant desenvolupant per una línia, ho feim aplicant diverses propietats:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 0 & x & 0 & -x \end{vmatrix} \qquad (F_4 - F_3 \to F_4)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -x^2+1 & x & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 0 & x & 0 & -x \end{vmatrix} \qquad (F_2 \cdot x + F_1 \to F_1)$$

$$= -\begin{vmatrix} -x^2+1 & x & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ x & 0 & -x \end{vmatrix} \qquad (\text{desen. per } C_1)$$

$$= -x \cdot \begin{vmatrix} -x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & 0 & -x \end{vmatrix} \qquad (\text{factor comú } C_2)$$

$$= -x \begin{vmatrix} x^2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2x & 0 & -x \end{vmatrix} \qquad (C_3 - C_1 \to C_1)$$

$$= -x^2 \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -x \end{vmatrix} \qquad (\text{factor comú } C_1)$$

$$= -x^2 \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -x \end{vmatrix} \qquad (C_2 + C_3 \to C_3)$$

$$= -x^2 \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -x \end{vmatrix} \qquad (F_2 + F_1 \to F_1)$$

$$= -x^2 \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} \qquad (\text{factor comú } F_2, F_3)$$

$$= -x^2(x^2-4) \qquad (\text{regla de Sarrus})$$

Per tant, el determinant val zero si, i només si, $x = 0$ o bé $x = \pm 2$.

14 Aplicarem la regla de Chió:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -x^2 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \qquad (F1 - F_4 \cdot x \to F_1)$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x^2 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \qquad (\text{desenvolupant per } C_1)$$

$$= -(1 - x^4) \qquad (\text{regla de Sarrus})$$

Per tant, el determinant és zero quan $x = \pm 1$.

15 $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} =$
$(4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4a+1) \cdot 1 = 4a+1$

B.2 Matrius

26 $\begin{pmatrix} 33 & -12 & -15 \\ -12 & 12 & -9 \\ -15 & -9 & 29 \end{pmatrix}$

36 Les matrius són singulars per *a*) $\alpha = -1$ i $\alpha = -4$, *b*) $a = \pm\sqrt{3}$, *c*) $a = -3$, *d*) $\alpha = -1/3$ i $\alpha = 2$, *e*) $a = 0$, *f*) sempre, *g*) $m = 0$ i $m = 1$, *h*) $m = 0$, *i*) $a = 0$ i $a = 1$, *j*) mai, *k*) $a = 0$ i $a = \pm 1$, *l*) $k = 0$, *m*) $x = 1$ i $x = 2$, *n*) $a = 1$ i $a = \pm\sqrt{2}$, *o*) $a = 2$ i $a = \pm\sqrt{2}$, *p*) $a = 0$, *q*) $k = \pm 1$

B.3 Sistemes d'equacions

48 *a*) $(0, 1, 1)$ *b*) $(1, 2, -1)$ *c*) $(5, 1, 0)$ *d*) $(1/2, -1/4, 1)$ *e*) compatible indeterminat $(\lambda/2, 3\lambda/2, \lambda)$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$ *f*) incompatible

53 80 cotxes blancs, 48 cotxes negres i 12 cotxes vermells

54 En Pere té 60 €, en Joan en té 40 i n'Àngel, 100.

55 Un pastisset de moniato costa 2, 5 €, el de nata, 3, 25 € i el de xocolata, 1, 75 €.

56 Hi ha 3 pomes, 4 peres i 5plàtans.

Bibliografia

[1] María E. Ballvé, Ana M. Porto, Miguel Delgado, Teresa Ulecia, *Problemas de Matemáticas Especiales*. Sanz y Torres, Madrid, 2a edició, 2004.

[2] Miguel de Guzmán, *Selectividad. Matemáticas I. Pruebas de 1995*. Anaya, Madrid, 1996.

[3] Angélica Escoredo, María Dolores Gómez, José Lorenzo, Pedro Machín, Carlos Pérez, José del Río, Domingo Sánchez, *Matemàtiques II 2 Batxillerat*. Edicions Voramar, Santillana, València, 2009.

[4] Alícia Espuig Bermell *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior. Matemàtiques*. 2009. Disponible en línia[2]. Aquest material es distribueix sota llicència Reconeixement NoComercial CompartirIgual 3.0 de Creative Commons (CC-BY-NC-SA 3.0)

[5] Agustín Estévez Andreu, Juan Enciso Pizarro, *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Schaum, McGraw-Hill, Madrid, 2005.

[6] Francisco Javier González Ortiz, *Proyecto MaTEX* (versió 1.00). 2004. Disponible en línia (accedit el novembre de 2014).

[2] http://somenxavier.github.io/cepasud/acfgs-alicia-espuig.html

[7] Javier SÁNCHEZ, *Apunts de Curs Orientació a la Universitat.* Notes manuscrites de Xavier Bordoy. Palma, 1996. No publicat.

[8] Ángel VEGAS PÉREZ, Manuel LÓPEZ CACHERO, *Elementos de matemáticas para economistas 1.* Ediciones Pirámide, Madrid, 2a edició, 1982.

Glossari